INFLUENCE DE L'ARRET D'UN VEHICULE SUR LE FLOT EN AMONT

par M. ROUBENS
Faculté Polytechnique de Mons

1. Introduction et résumé.

Le comportement individuel des véhicules doit être considéré dans de nombreux problèmes de trafic et plus particulièrement dans les problèmes de simulation de circulation urbaine à l'approche d'un carrefour sans feux. La simulation sur ordinateur nécessite dès lors la génération de véhicules. Deux options sont possibles pour définir le pas horlogique : le pas inter-véhiculaire et le pas unitaire classique. Dans le premier cas, la « naissance » d'un véhicule est déterminée par l'intervéhicule, c'est-à-dire par la distance aléatoire (exprimée en unités de temps) séparant deux mobiles. Cet inter-véhicule est engendré par tirage dans une loi de probabilité quelconque (exponentielle, gamma, Weibull, ...). Dans le second cas, il est possible, à chaque pas de l'horloge, de créer, avec une probabilité donnée, un nouveau véhicule par tirage dans une loi uniforme. Un schéma de Bernoulli est ainsi constitué par l'ordinateur. Un succès est identifié à la « naissance » d'un véhicule. Dans les deux cas envisagés, une contrainte de distance minimale peut être introduite.

Nous présentons ces deux types de génération, en nous limitant pour le premier cas aux intervéhicules exponentiels (loi d'apparition poissonnienne). Pour le second cas, la distribution de la somme des intervéhicules est calculée et permet de déterminer l'influence de l'arrêt d'un véhicule sur le comportement des suiveurs ainsi que le retard moyen occasionné à ceux-ci.

2. Génération de véhicules par pas aléatoires : intervéhicule exponentiel.

Soient 1, 2, ..., les instants d'apparition des véhicules distribués suivant une loi de Poisson et i_k, les intervéhicules $(k, k+1)$. La fonction de fréquence de i_k, $k = 1, 2, \ldots$, s'écrit

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda(t-d_m)} & \text{si} \quad d_m \leqslant t, \\ 0 & \text{si} \quad t < d_m, \end{cases} \tag{1}$$

si λ est le taux d'arrivées des véhicules exprimé en [véhicules/temps] et d_m, la distance intervéhiculaire minimale exprimée en [temps].

La moyenne des intervéhicules vaut

$$E(i_k) = d_m + \frac{1}{\lambda}. \tag{2}$$

Pour engendrer des intervéhicules, il suffit de tirer dans la loi

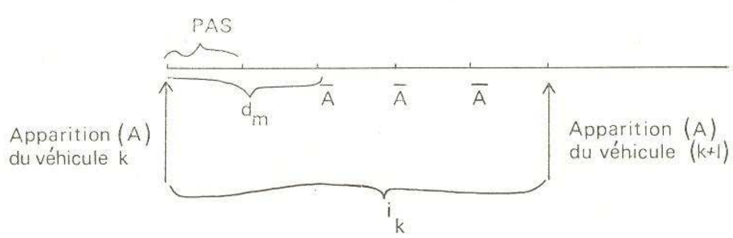
$$F(x) = \int_{d_m}^{x} f(t)\, dt, \qquad x \geqslant d_m.$$

Si y est une variable uniforme sur le segment [0, 1], obtenue à l'aide d'une des règles classiques de génération de nombres au hasard, nous trouvons un intervéhicule i par la formule

$$i = d_m - \frac{1}{\lambda} \log_e y.$$

3. Génération de véhicules par pas unitaires : schéma de Bernoulli.

Considérons le schéma de Bernoulli suivant :



Si p = P (apparition d'un véhicule), $q = 1 - p$ et si x est exprimé en [pas], la distribution des intervéhicules i_k est géométrique et

$$P(i_k = x) = \begin{cases} p\, q^{x-d_m} & \text{si} \quad d_m \leqslant x, \\ 0 & \text{si} \quad x < d_m. \end{cases} \tag{3}$$

$$E(i_k) = d_m + \frac{q}{p} = d_m - 1 + \frac{1}{p}. \tag{4}$$

La formule (4) permet de déterminer la valeur de p correspondant à une distance minimale et un intervéhicule moyen donnés.

La génération sur ordinateur se fait très simplement (voir aussi [1]). A chaque pas, on vérifie si la distance séparant ce pas de la dernière apparition est inférieure, égale ou supérieure à d_m. Lorsque la distance d_m est atteinte ou dépassée, en engendre y, variable uniforme sur [0, 1].

$$\text{Si} \begin{cases} y \leqslant p, \text{ il y a une nouvelle apparition (A),} \\ y > p, \text{ il n'y a pas d'apparition } (\overline{A}). \end{cases}$$

Soit $J_N = \sum_{\nu=1}^{N} j_\nu$, $j_\nu = i_\nu - d_m$. Recherchons $P(J_N = x) = P_N(x)$, les intervéhicules j_ν étant indépendants.

La fonction génératrice de $P_1(x)$, notée $P_1^*(z)$, vaut, par (2),

$$P_1^*(z) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \, P(j_1 = x) = \sum_{x=0}^{\infty} p\,(qz)^x = p\,(1 - qz)^{-1}.$$

Dès lors, avec des notations évidentes,

$$P_N^*(z) = [P_1^*(z)]^N = p^N (1 - qz)^{-N}.$$

Par développement en série de $(1 - qz)^{-N}$, il vient :

$$P_N^*(z) = \sum_{x=0}^{\infty} p^N \binom{N+x-1}{x-1} q^x z^x \text{ et finalement,}$$

$$P_N(x) = \binom{N+x-1}{x-1} p^N q^x. \tag{5}$$

4. Influence de l'arrêt d'un véhicule sur le comportement des suiveurs.

Supposons qu'un véhicule (appelé 1) s'arrête durant un temps A_0. Si la distance minimale (exprimée en [pas]) séparant deux véhicules à l'*arrêt* est d_a et si le retard infligé aux suiveurs pour démarrage vaut R, nous recherchons Q_k, la probabilité pour que k véhicules (notés 2, ..., $k+1$) soient influencés par l'arrêt du véhicule 1.

La distance minimale séparant deux véhicules en *mouvement* vaut d_m ($d_m > d_a$) et la distribution des intervéhicules est géométrique.

A titre d'exemple, considérons $A_0 = 5$ sec, $d_a = 2$ sec, $R = 2$ sec, $d_m = 5$ sec. Si $i_1 = 5$ sec, $i_2 = 6$ sec, $i_3 = 5$ sec, $i_4 = 6$ sec, ..., la figure 1 résume la situation.

Nous constatons, dans ce cas particulier, que les intervéhicules (1, 2), (2, 3), (3, 4) des véhicules 2, 3, 4 en mouvement après l'arrêt sont inférieurs à $d_m = 5$ sec. Une telle situation se présente pour les véhicules influencés par l'arrêt de 1, si $d_m < d_a + R$. Toutefois, la situation réelle s'apparentant à la figure 2, la solution théorique proposée est valable si « influence » signifie arrêt du véhicule et non ralentissement de celui-ci.

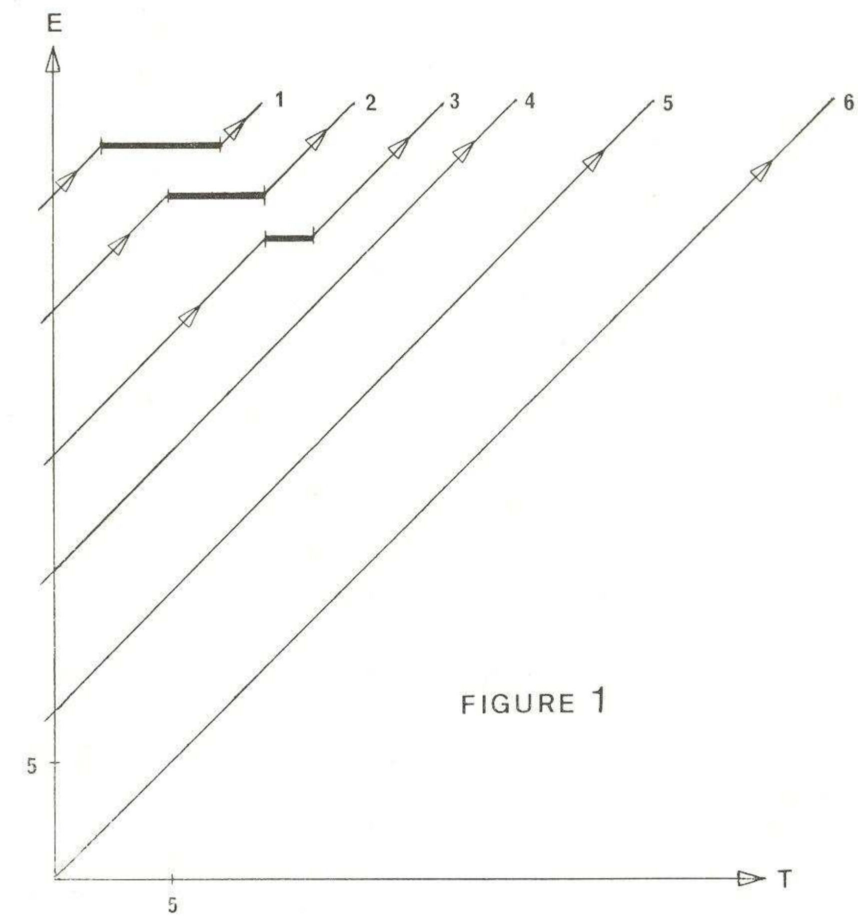


Fig. 1.

L'arrêt du véhicule 1 influence k véhicules si et seulement si :

$$\begin{cases} i_1 \leqslant A_0 + d_a, \\ i_1 + i_2 \leqslant A_0 + 2\,d_a + R, \\ \vdots \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k \leqslant A_0 + k\,d_a + (k-1)\,R, \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_{k+1} > A_0 + (k+1)\,d_a + k\,R. \end{cases} \qquad (6)$$

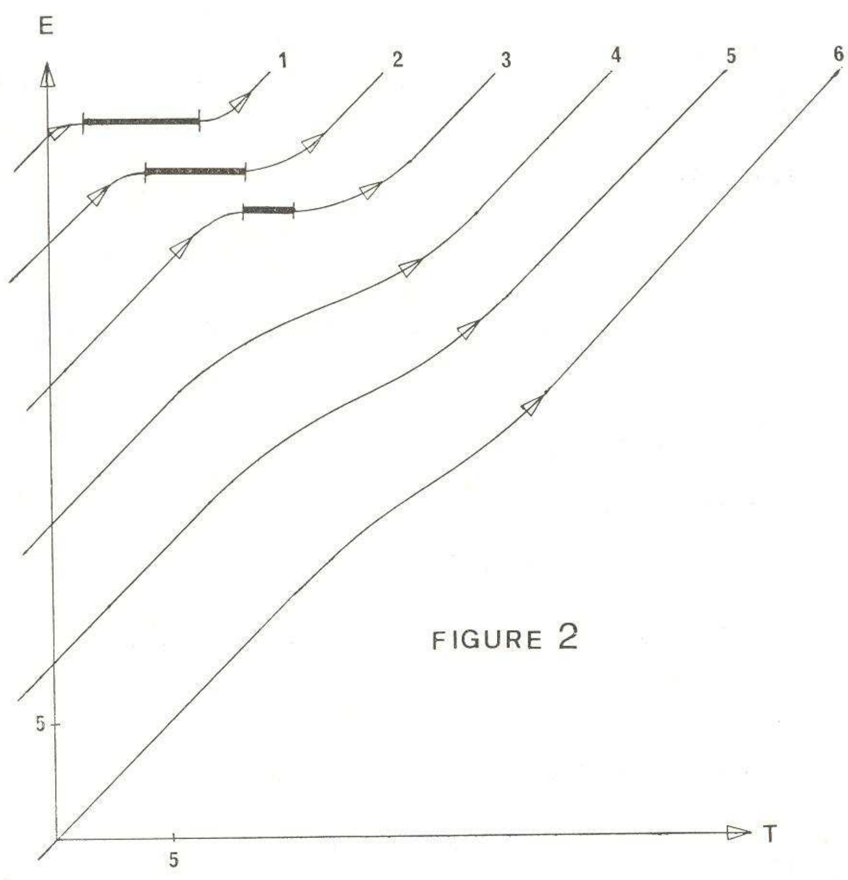


Fig. 2.

Si $j_k = i_k - d_m$, $\quad J_N = \sum_{\nu=1}^{N} j_\nu$, $\quad \theta = d_a - d_m + R$,

$A_1 = A_0 + d_a - d_m$, $A_k = A_1 + (k-1)\,\theta$, les inégalités (6) s'écrivent :

$$\begin{cases} J_1 \leqslant A_1\,, \\ J_2 \leqslant A_2\,, \\ \vdots \\ J_k \leqslant A_k\,, \\ J_{k+1} > A_{k+1}\,. \end{cases} \tag{7}$$

Le problème posé ne présente pas d'intérêt si $d_m > d_a + A_0$. En effet, dans ce cas, $A_1 < 0$ et $Q_0 = P(J_1 > A_1) = 1$.

Supposons, dès lors, $d_m \leqslant A_0 + d_a$ et considérons séparément $\theta < 0$ et $\theta > 0$.

a) $\theta < 0$.

Soit r tel que $A_1 > A_2 > \ldots > A_r \geqslant 0$, $A_{r+j} < 0$, $j > 0$.

Dès lors, $Q_{r+j} = P(J_1 \leqslant A_1, \ldots, J_{r+1} \leqslant A_{r+1}, \ldots) = 0$, car l'événement $J_{r+1} \geqslant A_{r+1}$ est impossible.

$$Q_0 = P(J_1 > A_1) = p \sum_{x=A_1+1}^{\infty} q^x = q^{A_1+1}\,,$$

$$\begin{aligned} Q_r &= P(J_1 \leqslant A_1, \ldots, J_r \leqslant A_r, J_{r+1} > A_{r+1})\,, \\ &= P(J_1 \leqslant A_1, \ldots, J_r \leqslant A_r)\,, \text{ car } A_{r+1} < 0\,, \\ &= P(J_r \leqslant A_r) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} Q_i = \sum_{x=0}^{A_r} \binom{x+r-1}{r-1} p^r q^x\,. \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer Q_j, si $0 < j < r$.

$$Q_j = P(J_1 \leqslant A_1, \ldots, J_j \leqslant A_j, J_{j+1} > A_{j+1})\,.$$

Comme $J_j \leqslant A_j \rightarrow \begin{cases} J_1 \leqslant A_1\,, \\ \vdots \\ J_{j-1} \leqslant A_{j-1}\,. \end{cases}$ $\quad (A_1 > A_2 > \ldots > A_j)$, nous obtenons

$$Q_j = P(J_j \leqslant A_j\,,\ J_{j+1} > A_{j+1})\,,$$

$$= P(J_j \leqslant A_{j+1}\,,\ J_{j+1} > A_{j+1}) + P(A_{j+1} < J_j \leqslant A_{j+1})\,,$$

$$= \sum_{x=0}^{A_{j+1}} \binom{x+j-1}{j-1} p^j q^x P(j_{j+1} > A_{j+1} - x) + \sum_{x=A_{j+1}+1}^{A_j} \binom{x+j-1}{j-1} p^j q^x\,,$$

en vertu de (5)

$$= \sum_{x=0}^{A_{j+1}} \binom{x+j-1}{j-1} p^j q^x q^{A_{j+1}-x+1} + \dots .$$

Une démonstration par récurrence conduit à

$$\sum_{\nu=0}^{\alpha} \binom{\nu+\beta}{\beta} = \binom{\alpha+\beta+1}{\beta+1}.$$

Cette dernière formule permet d'écrire finalement :

$$\left\{\begin{aligned}
&Q_0 = q^{A_1+1}\\
&Q_j = p^j \Big\{\binom{A_{j+1}+j}{j} q^{A_{j+1}+1} + \sum_{x=A_{j+1}+1}^{A_j} \binom{x+j-1}{j-1} q^x\Big\}\,, \quad 0 < j < r;\\
&Q_r = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} Q_i = \sum_{x=0}^{A_r} \binom{x+r-1}{r-1} q^x p^r\,,\\
&Q_{r+j} = 0\,,\ j > 0\,.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

b) $\theta \geqslant 0$.

Dans ce cas, $A_1 \leqslant A_2\,, \dots,$ et $Q_j \neq 0$, pour tout $j \geqslant 0$.

$$Q_0 = P(J_1 > A_1) = Q^{A_1+1}\,.$$

$$Q_j = P(J_1 \leqslant A_1\,, \dots, J_j \leqslant A_j\,, J_{j+1} > A_{j+1}),\ j > 0\,,$$

$$= \sum_{x_1=0}^{A_1} \dots \sum_{x_j=0}^{A_j-x_1-\dots-x_{j-1}} \ \sum_{x_{j+1}=A_{j+1}-x_1-\dots-x_j+1}^{\infty} p^{j+1} q^{x_1+\dots+x_{j+1}}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{A_1} \dots \sum_{x_j=0}^{A_j-\dots-x_{j-1}} p^j\, q^{x_1+\dots+x_j}\, q^{A_{j+1}-x_1-\dots-x_j+1}$$

$$= p^j\, Q^{A_{j+1}+1} \{ \sum_{x_1=0}^{A_1} \dots \sum_{x_j=0}^{A_j-x_1-\dots-x_{j-1}} 1 \}.$$

Pour faciliter le calcul de la série multiple, il suffit de poser :

$$y_k = A_k - x_1 - \dots - x_k \quad \text{et, dès lors,}$$

$$\begin{cases} Q_0 = q^{A_1+1}, \\ Q_j = p^j\, q^{A_{j+1}+1} \{ \sum_{y_1=0}^{A_1} \sum_{y_2=0}^{y_1+\theta} \dots \sum_{y_j=0}^{y_{j-1}+\theta} 1 \} \; j > 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Nous obtenons ainsi,

$$\begin{cases} Q_0 = q^{A_1+1}, \\ Q_1 = (A_1 + 1)\, p\, q^{A_2+1}, \\ Q_2 = \dfrac{(A_1 + 1)\,(A_3 + 2)}{2}\, p^2\, q^{A_3+1}, \\ \vdots \end{cases}$$

Si les intervéhicules sont exponentiels, la probabilité Q_k s'écrit (voir [2]),

$$Q_k = \int_0^{A_1} \lambda e^{-\lambda j_1}\, d\, j_1 \dots \int_0^{A_k - j_1 - \dots - j_{k-1}} \lambda e^{-\lambda j_k}\, d\, j_k \int_{A_{k+1} - j_1 - \dots j_k}^{\infty} \lambda e^{-\lambda j_{k+1}}\, d\, j_{k+1}.$$

Par le changement de variables $y_k = A_k - J_k$, $k > 0$, nous obtenons :

$$Q_k = \lambda^k\, e^{-\lambda A_{k+1}} \int_0^{A_1} dy_1 \int_0^{y_1+\theta} dy_2 \dots \int_0^{y_{k-1}+\theta} dy_k.$$

On montre par récurrence que :

$$\int_0^{y_1+\theta} dy_2 \dots \int_0^{y_{r-1}+\theta} dy_r = \frac{1}{(r-1)!}\, (y_1 + \theta)\, (y_1 + r\theta)^{r-2}.$$

$$\text{Dès lors,} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_0 = e^{-\lambda A_1} \\ \\ Q_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda A_{k+1}}\, A_1\, A^{k-1}_{k+1}, \quad k > 0. \end{array} \right. \tag{10}$$

Les formules (2) et (10) permettent d'obtenir des approximations continues (intervéhicules exponentiels) des formules (4) et (9) du problème discret (intervéhicules géométriques), si les conditions suivantes sont respectées :

— d_m (discret) $\geqslant 1$, (11)

— d_m (discret) $= d_m$ (continu) $+ 1$, (12)

— $p = \lambda$, (13)

— p proche de zéro ($p \leqslant .1$) (14)

En effet, d_m (discret) ne peut être nul afin d'éviter une accumulation de véhicules en un point. De plus, la relation (12) permet — par comparaison de (2) et (4) — d'écrire (13), relation intuitivement évidente. Enfin, l'approximation de la distribution géométrique par la distribution exponentielle n'est valable que si p est proche de zéro (dans ce cas $e^{-p} \cong 1 - p$).

Considérons le cas particulier où

$$A_0 = 2, \quad d_a = 1, \quad R = 1,$$
$$d_m = 0, \quad \lambda = .1,$$
$$d_m = 1, \quad p = .1.$$

Nous obtenons les résultats suivants :

Discret	Continu
$A_1 = 2,\ A_2 = 3,\ A_3 = 4, \ldots$	$A_1 = 3,\ A_2 = 5,\ A_3 = 7, \ldots$
$Q_0 = .729$	$Q_0 = .741$
$Q_1 = .197$	$Q_1 = .182$
$Q_2 = .053$	$Q_2 = .057$

5. Arrêt moyen infligé par l'arrêt du véhicule 1.

Si le véhicule $(j+1)$ est influencé par l'arrêt du véhicule 1, $J_j \leqslant A_j$ et la durée d'arrêt, notée a_{j+1}, vaut

$$a_{j+1} = A_j + R - J_j .$$

Appelons $\bar{a}_{j+1}$, la durée moyenne d'arrêt du véhicule $(j+1)$.

$$\bar{a}_{j+1} = \sum_{k=0}^{A_j} (A_j + R - k) \binom{k+j-1}{j-1} p^j q^k \qquad \text{[voir (5)]}$$

Si k véhicules sont influencés par l'arrêt A_0, nous notons

$$\overline{(A/k)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \bar{a}_{j+1}$$

et, dès lors, le retard moyen infligé par l'arrêt A_0 du véhicule 1 vaut :

$$\text{si } \theta < 0, \overline{A} = \sum_{i=1}^{k} \overline{(A/i)}\, Q_i , \qquad (A_k \geqslant 0, A_{k+1} < 0),$$

$$\text{si } \theta \geqslant 0, \overline{A} = \sum_{i=1} \overline{(A/i)}\, Q_i .$$

REFERENCES

[1] R.M. LEWIS : A proposed headway distribution for traffic simulation studies. Traffic Engineering, Vol. 33, n° 5 (1963), pp. 16-19.

[2] Ph. PASSAU : Files d'attente et processus markoviens à une intersection de trafic. In « Queuing Theory - Recent Developments and Applications », The English Universities Press, London, 1967, pp. 185-192.