LE CONTROLE DE LA PRODUCTION DANS L'INDUSTRIE DES PANNEAUX DE PARTICULES

par M. ROUBENS
Université libre de Bruxelles

1. Introduction.

Les panneaux considérés sont constitués de bois provenant de l'éclaircissage de forêts, de chutes d'une usine de placage ou d'une scierie, découpés en particules. Ces particules sont passées au séchoir, entourées de résine et pressées. Les caractéristiques mesurées dans le laboratoire de contrôle sont en ordre principal : la densité, le gonflement, l'épaisseur, la traction, la flexion, le pouvoir de retenue des vis.

Durant une période préparatoire, dite de « précontrôle », 32 panneaux sont extraits de la production.

Pour chaque caractéristique et chaque panneau, la moyenne et l'amplitude de 5 mesures sont enregistrées séparément sur une carte du type Shewhart [4]. Ces mesures constituent l'échantillon de base et servent au calcul des paramètres de tendance centrale et de dispersion (intra et inter-panneaux), qui permettent d'établir les limites de contrôle, utilisées dans la seconde période, dite de contrôle.

La matière première très hétérogène — souvent une vingtaine d'essences — et la complexité de l'usinage rendent les mesures particulièrement vulnérables aux variations entre panneaux.

Il faut dès lors apporter un grand soin au contrôle préalable du caractère aléatoire et de l'absence de « trend » ou de variation de l'échantillon de base. De plus, le calcul des limites de contrôle sera refait après une période de contrôle s'étendant sur 32 panneaux, leurs mesures servant de nouvel échantillon de base.

2. Contrôle du caractère aléatoire de l'échantillon de base.

Considérons les 32 moyennes de l'échantillon de base. Classons ces observations en deux groupes, le premier constitué des valeurs supérieures à la médiane, le second, des valeurs inférieures. Les valeurs, éventuellement confondues avec la médiane, sont écartées.

Un chapelet positif (négatif) d'ordre k est une suite de k valeurs supérieures (inférieures) à la médiane.

Nous rejetons l'hypothèse d'échantillonnage aléatoire, au niveau 0,05, si l'une des éventualités suivantes se produit [3] (les valeurs sont supposées distinctes de la médiane) :

a) le nombre total de chapelets positifs et négatifs, de tous ordres, est inférieur à 12 ou supérieur à 23;

b) il existe au moins un chapelet d'ordre supérieur ou égal à 8;

c) il existe au moins un chapelet positif et un chapelet négatif d'ordre supérieur à 6.

Prenons trois exemples.

Le premier est relatif au pouvoir de retenue des vis.

Les 32 moyennes, exprimées en kg, sont :
83, 103, 107, 91, 109, 112, 88, 106, 73, 99, 91, 102, 84, 89, 111, 84, 96, 90, 109, 104, 116, 92, 109, 115, 107, 99, 97, 112, 113, 71, 99. 100.

La médiane vaut 99,5.

Le nombre total de chapelets est 18.

Il n'existe aucun chapelet d'ordre supérieur ou égal à 6.

L'hypothèse d'échantillonnage au hasard n'est pas infirmée.

Le deuxième est relatif à l'épaisseur des panneaux.

Les moyennes, exprimées en mm, sont :
19,13; 19,53; 19,36; 19,22; 19,87; 19,46; 19,01; 19,20; 19,30; 19,44; 19,53; 19,56; 19,62; 19,81; 20,51; 19,02; 19,30; 19,53; 19,67; 20,11; 20,77; 19,27; 19,58; 20,13; 19,96; 19,48; 19,96; 19,32; 19,47; 19,50; 19,31; 19,40.

La médiane vaut 19,49.

Le nombre total de chapelets est 15.

Il n'existe aucun chapelet d'ordre supérieur ou égal à 6.

L'hypothèse d'échantillonnage au hasard n'est pas infirmée.

Dans le troisième exemple, nous considérons les densités des panneaux.

Les moyennes, exprimées en kg par m^3, sont :
591, 612, 607, 623, 612, 615, 609, 619, 595, 618, 620, 610, 604, 631, 649, 634, 637, 648, 644, 647, 615, 632, 640, 647, 634, 645, 656, 610, 639, 596, 642, 595.

La médiane vaut 621,5.

Le nombre total de chapelets est 11.

Il existe un chapelet d'ordre 9.

Il existe deux chapelets positifs d'ordre supérieur ou égal à 6 et un chapelet négatif d'ordre supérieur ou égal à 6.

Les trois tests, par ailleurs dépendants, entraînent le rejet de l'hypothèse d'échantillonnage aléatoire, au niveau 0,05.

Ce rejet fut expliqué par l'existence de silos de provenances différentes. Les 14 premiers panneaux avaient été fabriqués à l'aide de copeaux extraits d'un premier silo. Les panneaux suivants étaient constitués de copeaux provenant d'un second silo.

L'hétérogénéité de la matière première a, pour certaines variables, une influence significative. Dans le dernier cas cité, elle a créé un accroissement de la densité moyenne.

3. Contrôle de l'absence de « trend » ou de variation cyclique dans l'échantillon de base.

Considérons la suite formée par les signes des pentes des segments joignant les points représentant les valeurs de l'échantillon de base.

Un chapelet de pentes positives (négatives) d'ordre k est une suite de k signes positifs (négatifs).

Nous rejetons l'hypothèse d'absence de tendance ou de variation cyclique, au niveau 0,05, si l'une des éventualités suivantes se produit (en faisant abstraction de la possibilité d'avoir une pente nulle) :

a) le nombre total de chapelets de pentes positives ou négatives, de tous ordres, est inférieur à 17 ou supérieur à 25;

b) il existe au moins un chapelet de pentes d'ordre supérieur ou égal à 6.

Reprenons les trois exemples cités plus haut.

Dans les exemples 1 et 3, le nombre total de chapelets de pentes est respectivement égal à 23 et 24 et il n'existe aucun chapelet de pentes d'ordre supérieur ou égal à 6. L'hypothèse d'absence de « trend » ou de cycle n'est pas rejetée.

Dans l'exemple 2, le nombre total de chapelets de pentes vaut 15. De plus, il existe un chapelet de pentes d'ordre 8. L'hypothèse d'absence de « trend » ou de cycle est rejetée, au niveau 0,05. Un réglage grossier de la ponceuse était à l'origine des cycles apparaissant dans l'exemple 2.

4. Etude des variabilités.

Appelons y_{ij} les mesures effectuées sur les éprouvettes extraites des différents panneaux de l'échantillon de base; $i = 1, \ldots, 32$, $j = 1, \ldots, 5$.

Nous admettons que la variabilité des mesures y_{ij} provient de deux sources stochastiquement indépendantes : $y_{ij} = m + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, où m est une constante et où α_i — pour tout i — et ε_{ij} — pour tout i et tout j — sont des variables aléatoires unidimensionnelles, indépendantes, supposées gaussiennes de moyenne nulle. L'hypothèse de normalité peut être aisément confirmée par le test de Kolmogorov-Smirnov.

De façon brève, α_i : N $(0, \sigma_A)$, $\varepsilon_{ij} =$ N $(0, \sigma_E)$.

Si $\bar{y}_{i.}$ est la moyenne des cinq mesures effectuées pour le panneau i, nous obtenons, par les hypothèses faites :

$$\bar{y}_{i.} = \mathrm{N}(0, \sigma_P), \text{ où } \sigma_P^2 = \sigma_A^2 + (1/5)\, \sigma_E^2 .$$

L'analyse de la variance permet d'estimer les quatre paramètres inconnus : la moyenne générale m, σ_P^2, la variance intra-panneaux σ_E^2, la variance inter-panneaux σ_A^2 ainsi que les coefficients de variation $V_E = 100\,(\sigma_E/m)$ et $V_P = 100\,(\sigma_P/m)$ (en %).

Nous avons $$\hat{m} = \frac{1}{32} \sum_{i=1}^{32} \bar{y}_{i.} = \bar{y}_{..},$$

$$\hat{\sigma}_E^2 = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{5} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = \frac{1}{32} \sum_{i=1}^{32} s_i^2,$$

$$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{1}{31} \sum_{i=1}^{32} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2,$$

$$\hat{\sigma}_A^2 = \hat{\sigma}_P^2 - \frac{1}{5} \hat{\sigma}_E^2,$$

$$\hat{V}_P = 100 \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_P^2}}{\hat{m}},$$

$$\hat{V}_E = 100 \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_E^2}}{\hat{m}}.$$

Les estimateurs des coefficients de variation sont très légèrement biaisés.

Considérons l'exemple 1. Nous obtenons les estimations suivantes :

$$\hat{m} = 98{,}78, \quad \hat{\sigma}_E^2 = 129{,}30, \quad \hat{\sigma}_P^2 = 142{,}17, \quad \hat{\sigma}_A^2 = 116{,}31,$$

$$\hat{V}_P = 12{,}07\ \%, \quad \hat{V}_E = 11{,}51\ \%.$$

La recherche des estimateurs de σ_E^2 et σ_P^2, par la méthode des moindres carrés, donne lieu à des calculs assez longs et exige — pour $\hat{\sigma}_E^2$ — l'intervention des valeurs individuelles y_{ij}.

Nous proposons une seconde méthode [2], plus rapide et qui ne nécessite que la connaissance des moyennes $\bar{y}_{i.}$ et des amplitudes des cinq mesures faites pour chaque panneau, r_i, valeurs qui sont enregistrées sur la carte. Cette méthode entraîne une réduction de l'efficacité d'environ 10 %.

Divisions les 32 observations de l'échantillon de base, en quatre groupes de huit mesures, à l'aide d'une table de nombres aléatoires [1].

Calculons les amplitudes dans les quatres groupes ainsi que leur moyenne, $\bar{R}$.

Des estimateurs sans biais de σ_P, σ_E, V_P, V_E sont respectivement fournis par :

$$\hat{\sigma}_P = 0{,}3512\ \bar{R}, \quad \hat{\sigma}_E = 0{,}4299\ \bar{r}, \quad \left(\bar{r} = \frac{1}{32} \sum_{i=1}^{32} r_i\right),$$

$$\hat{V}_P = 100\ (\hat{\sigma}_P/\hat{m}), \quad \hat{V}_E = 100\ (\hat{\sigma}_E/\hat{m}).$$

Reprenons l'exemple 1. A l'aide de la table des nombres aléatoires, nous avons obtenu les quatre groupes suivants :

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{\ 92,\ 91,\ 99,\ 113,\ 84,\ 91,\ 106,\ 111\};\ R_1 = 29,\\
G_2 &= \{104,\ 115,\ 84,\ 73,\ 112,\ 116,\ 102,\ 88\};\ R_2 = 43,\\
G_3 &= \{107,\ 109,\ 96,\ 89,\ 109,\ 103,\ 90,\ 100\};\ R_3 = 20,\\
G_4 &= \{\ 83,\ 99,\ 107,\ 99,\ 71,\ 112,\ 109,\ 97\};\ R_4 = 41.
\end{aligned}$$

$$\bar{R} = 33{,}25;\quad \hat{\sigma}_P = 11{,}68;\quad (\hat{\sigma}_P)^2 = 136{,}42;\quad \hat{V}_P = \frac{1168}{98{,}78} = 11{,}82\ \%.$$

Les amplitudes correspondant aux 32 moyennes sont :

22, 32, 50, 34, 25, 30, 29, 14, 15, 32, 34, 17, 21, 8, 23, 30,
10, 16, 24, 28, 32, 22, 29, 25, 39, 25, 34, 21, 32, 18, 40, 36.

$$\bar{r} = 26{,}10;\quad \hat{\sigma}_E = 11{,}22;\quad (\hat{\sigma}_E)^2 = 125{,}89;\quad \hat{V}_E = \frac{1122}{98{,}78} = 11{,}36\ \%.$$

5. Contrôle de la production.

Après vérification de l'absence de « trend » ou de variation cyclique et du caractère aléatoire de l'échantillon, celui-ci sert de base à la constitution de la carte de contrôle.

Nous entrons dans la période de contrôle : chaque panneau extrait de la production est éventuellement rejeté tant pour un écart trop grand à la moyenne m que pour une variabilité interne trop importante.

La probabilité de trouver la valeur moyenne d'un panneau dans l'intervalle $(m - 3{,}09\ \sigma_P;\ m + 3{,}09\ \sigma_P)$ est 0,998.

La probabilité de trouver l'amplitude des mesures des éprouvettes dans l'intervalle $(0{,}37\ \sigma_E;\ 5{,}48\ \sigma_E)$ est 0,998.

Les limites de contrôle pour les moyennes, $\bar{y}_{i.}$, et les amplitudes, r_i, basées sur un échantillon préalable, sont respectivement :

$$(\bar{y}_{..} - 3{,}09\ \hat{\sigma}_P;\ \bar{y}_{..} + 3{,}09\ \hat{\sigma}_P)$$

$$(0{,}37\ \hat{\sigma}_E;\ 5{,}48\ \hat{\sigma}_E).$$

Les limites de contrôle pour les moyennes, $\bar{y}_{i.}$, et les variances, s_i^2, basées sur un échantillon préalable, sont :

$$(\bar{y}_{..} - 3{,}09\ \hat{\sigma}_P;\ \bar{y}_{..} + 3{,}09\ \hat{\sigma}_P)$$

$$(0{,}02\ \hat{\sigma}_E^2;\ 4{,}62\ \hat{\sigma}_E^2).$$

Dans le cas de l'exemple 1, ces limites sont :

$(98{,}78 - 36{,}09;\ 98{,}78 + 36{,}09)$ ou $(62{,}69;\ 134{,}87)$
$(0{,}37 \,.\, 11{,}22;\ 5{,}48 \,.\, 11{,}22)$ ou $(4{,}15;\ 61{,}49)$
$(0{,}02 \,.\, 129{,}30;\ 4{,}62 \,.\, 129{,}30)$ ou $(2{,}59;\ 597{,}37)$.

6. **Amélioration de la production.**

L'étude des causes ayant entraîné le rejet des panneaux se trouvant en dehors des limites de contrôle, réduit à longue échéance la variabilité inter et intra-panneaux. Pour des raisons économiques — par exemple, pour bénéficier d'un « label de qualité » — les producteurs peuvent désirer réduire plus rapidement la variabilité de leur produit ou rendre la production homogène. Considérons la seconde éventualité. Une des manières d'atteindre ce but consiste à tracer des « limites d'inspection » sur la carte de contrôle. Tous les panneaux se trouvant en dehors de ces limites sont enregistrés et l'étude de ces panneaux permet au porducteur de déceler les causes d'hétérogénéité. Le resserrement des limites d'inspection autour de la valeur centrale est limité par deux contraintes, l'une naturelle, l'autre matérielle. En effet, d'une part, le but poursuivi est d'améliorer la production en homogénéisant celle-ci et il est dès lors inutile de descendre sous des limites permettant d'accepter l'hypothèse d'homogénéité de la production; d'autre part, l'inspection de panneaux de plus en plus nombreux entraîne *ipso facto* l'accroissement des dépenses du laboratoire d'étude.

Supposons la production sous contrôle et considérons la carte $(\bar{y}_{i.}, s_i^2)$. Soit $(\bar{y}_{..} - 3{,}09\ k_L\ \hat{\sigma}_P,\ \bar{y}_{..} + 3{,}09\ k_L\ \hat{\sigma}_P)$, les limites imposées par le label.

L'hypothèse d'homogénéité inter-panneaux transforme les limites

$$(\bar{y}_{..} - 3{,}09\ \hat{\sigma}_P,\ \bar{y}_{..} + 3{,}09\ \hat{\sigma}_P)$$

en les limites d'inspection d'homogénéité

$$(\bar{y}_{..} - 3{,}09\ k_H\ \hat{\sigma}_P,\ \bar{y}_{..} + 3{,}09\ k_H\ \hat{\sigma}_P),$$

où $k_H^2\ \hat{\sigma}_P^2 = (1/5)\ \hat{\sigma}_E^2$.

Supposons encore que $k_H < k_L$ et $k_L < 1$.

Soient

— C, le coût entraîné par l'étude d'un panneau se trouvant en dehors des limites d'inspection ;

— $\bar{C}_C$, le coût moyen d'inspection — pour une période s'étendant sur 32 panneaux contrôlés — dû aux limites de contrôle ;

— $\bar{C}_L$, le coût moyen d'inspection dû aux limites imposées par le label ;

— $\bar{C}_H$, le coût moyen d'inspection correspondant à k_H ;

— $\bar{C}_M$, le coût moyen maximum permis pour cette étude.

Calculons $\bar{C}_C/C$, $\bar{C}_L/C$, $\bar{C}_H/C$.

$C_C/C = 32$. Probabilité d'une inspection d'un panneau sortant des limites de contrôle.

Un panneau est inspecté si $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}| > 3{,}09\ \hat{\sigma}_P$ ou si s_i^2 est inférieur à $0{,}02\ \hat{\sigma}_E^2$ ou supérieur à $4{,}62\ \hat{\sigma}_E^2$.

$$\bar{C}_C/C = 32\ [0{,}002 + 0{,}002 - (0{,}002)^2] = 0{,}128$$

$\bar{C}_L/C = 32$. Probabilité d'une inspection d'un panneau sortant des limites imposées par le label.

Un panneau est inspecté si $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}| > 3{,}09\ k_L\ \hat{\sigma}_P$ ou si s_i^2 est inférieur à $0{,}02\ \hat{\sigma}_E^2$ ou supérieur à $4{,}62\ \hat{\sigma}_E^2$.

Soit $\phi(\alpha)$ la fonction de répartition de la variable normale réduite.

$$\bar{C}_L/C = 32 \{2 [1 - \phi(3{,}09\ k_L)] + 0{,}002 - 0{,}004 [1 - \phi(3{,}09\ k_L)]\}$$

$$= \{1{,}996 [1 - \phi(3{,}09\ k_L)] + 0{,}002\}.$$

$\bar{C}_H/C = 32$. Probabilité d'une inspection d'un panneau sortant des limites d'inspection d'homogénéité.

$$\bar{C}_H/C = 32 \{1{,}996 [1 - \phi(3{,}09\ k_H)] + 0{,}002\}.$$

Au coût maximum $\bar{C}_M$ correspond k_M, tel que

$$\bar{C}_M/C = 32 \{1{,}996 [1 - \phi(3{,}09\ k_M)] + 0{,}002\}.$$

Si $k_M < k_H$ (cette inégalité entraîne $\bar{C}_M > \bar{C}_H$), il est possible d'étudier les causes d'hétérogénéité et les limites d'inspection

$$(\bar{y}_{..} - 3{,}09\ k_H\ \hat{\sigma}_P\ ,\ \bar{y}_{..} + 3{,}09\ k_H\ \hat{\sigma}_P)$$

sont tracées sur la carte.

Si $k_L > k_M > k_H$ (cette double inégalité entraîne $\bar{C}_L < \bar{C}_M < \bar{C}_H$), le coût entraîné par l'étude des causes d'hétérogénéité est trop grand et les limites d'inspection

$$(\bar{y}_{..} - 3{,}09\ k_L\ \hat{\sigma}_P\ ,\ \bar{y}_{..} + 3{,}09\ k_L\ \hat{\sigma}_P)$$

sont tracées sur la carte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A. FISCHER and F. YATES : Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Oliver and Boyd, Edinburgh (1949).

[2] F.E. GRUBBS and C.L. WEAVER : The Best Unbiaised Estimate of Population Standard Deviation Based on Group Ranges ; Journ. Amer. Stat. Ass., 42 (1947).

[3] A. HALD : Statistical Theory with Engineering Applications ; J. Wiley, New York (1952).

[4] W.A. SHEWHART : Economic Control of Quality of Manufactured Product : Van Nostrand, New York (1931).