APPLICATIONS ASTRONOMIQUES ET ASTROPHYSIQUES DE LA STATISTIQUE

par R. COUTREZ
Université libre de Bruxelles

L'exposé fait dans le cadre de cette Journée de la Statistique a pour but de montrer dans quel sens s'est développé depuis quelques décades un ensemble de méthodes appliquées couramment à l'investigation du monde extérieur et groupées sous le titre très vaste d'Astronomie Statistique. Pour l'astronome, en effet, la statistique est devenue un moyen de choix qui lui permet d'accéder à trois fins essentielles, communes d'ailleurs à toutes les sciences de la nature :

a) *caractériser* par un petit nombre de paramètres convenablement définis l'« état » ou structure générale de vastes ensembles d'informations numériques obtenues par l'observation de nombreux objets similaires, *comparer* de telles assemblées de manière à constituer des collections suffisamment homogènes et représentatives d'un phénomène astrophysique déterminé (ex. : l'étude des étoiles de la Galaxie dans le but de reconnaître l'évolution stellaire ou celle du système);

b) *dégager* les relations plus ou moins étroites entre ces paramètres afin que la donnée arbitraire d'un ou plusieurs d'entre eux puisse servir à délimiter les autres (ex. : l'étude des lois de structure galactiques, la reconnaissance des lois du mouvement stellaire);

c) *rechercher* une explication de ces lois empiriques les groupant dans une synthèse théorique nécessairement imprégnée de concepts statistiques (ex. : la dynamique stellaire, véritable mécanique statistique du « gaz » d'étoiles).

On se limitera volontairement au domaine de la Statistique et de la Dynamique stellaires, celles-ci ne constituant qu'une partie de l'astronomie statistique. Remontant en effet dans le passé, on pourrait faire débuter le sujet à Kepler, dont les trois lois fondamentales du système solaire tirées des nombreuses observations planétaires de Tycho-Brahé ne sont que des lois empiriques trouvant leur explication fonctionnelle dans la mécanique de Newton, avec une définition corrélative des cadres inobservables d'espace et de temps. Lorsqu'on s'adresse à des ensembles beaucoup plus étendus d'objets sidéraux comme la Galaxie (10^{11} étoiles) dont seule une faible partie est observée, on conçoit tout d'abord la nécessité d'une caractérisation bien nette, d'une homogénéisation des données numériques, de la recherche statistique des distributions spatiales et cinétiques, de l'étude statistique des corrélations entre les facteurs qui les caractérisent, enfin d'une explication théorique où les concepts statistiques joueront un rôle majeur. Il faut tenir compte aussi de la lenteur (à notre échelle) de l'évolution et des mouvements apparents des objets célestes. En substituant aux observations étendues dans le temps celles faites en quelque sorte dans l'espace, en s'adressant à une multitude d'objets qui en représentent les phases, on réussit à définir avec assez bien de précision la manière dont cette évolution ou ces mouvements s'accomplissent. Enfin, les observations elles-mêmes sont difficiles : il faut quelques dizaines d'années pour obtenir un bon « mouvement propre » stellaire ou une parallaxe, les déplacements *relatifs* d'étoiles étant observés. Les données numériques sont entachées d'erreurs inévitables; elles dépendent des méthodes et des instruments employés et doivent être rendues cohérentes, et c'est probablement dans ce domaine que la statistique s'est introduite pour la première fois en astronomie (il fut un temps où la théorie des erreurs d'observation et la méthode des moindres carrés étaient strictement l'apanage des astronomes et géodésiens).

Parmi les données stellaires les plus immédiatement représentatives, il convient de citer : a) le *type spectral* et la *magnitude apparente*, données physiques dont la dernière est convertie en *magnitude absolue* ou « éclat intrinsèque » si la distance est connue, b) la position sur la sphère céleste définie par les *coordonnées angulaires* (ascension droite, déclinaison), la distance déterminée par la *parallaxe* dont il existe divers types : parallaxes trigonométriques, spectroscopiques, dynamiques, hypothétiques; données géométriques servant à préciser l'emplacement de l'étoile dans un trièdre choisi, c) les *mouvements propres* angulaires (variations des coordonnées) et la *vitesse radiale* (données cinématiques). La plupart de ces quantités sont difficilement mesurées et toutes n'ont pas la même abondance; les parallaxes sont rares et peu précises, les vitesses radiales basées pourtant sur des mesures spectroscopiques pratiquement indépendantes de l'absorption interstellaire n'ont pas toujours la qualité ni l'homogénéité désirables. En outre, l'hémisphère austral est beaucoup moins connu que l'hémisphère boréal du ciel et les données y sont moins nombreuses. Les imperfections instrumentales et les difficultés d'observation, surtout s'il s'agit d'étoiles faibles, font que les *listes individuelles* de données provenant des divers observatoires sont sans valeur pour les études d'ensemble de la Galaxie parce qu'hétérogènes. Au prix de comparaisons statistiques, ces listes sont groupées en *catalogues relatifs* ou secondaires déjà meilleurs (élimination d'erreurs systématiques, réduction d'erreurs accidentelles). Enfin, une étude très serrée et demandant des précautions considérables permet de constituer des *catalogues absolus* ou fondamentaux, véritables étalons, dont la précision interne et externe est excellente. De tels catalogues ne se rapportent qu'aux étoiles brillantes; il va de soi qu'un catalogue absolu contiendra peu de données. Les autres catalogues s'y rattachent au prix d'une étude statistique; on peut ainsi ramener un catalogue relatif au catalogue absolu correspondant s'il existe, enrichir le catalogue absolu au moyen des données du catalogue relatif, améliorer la précision de ce dernier. Ce problème de la comparaison statistique des catalogues astronomiques est capital, car c'est généralement sur les catalogues relatifs que portent les investigations de la statistique stelliare. Dans un autre domaine, les études photométriques portent souvent sur les clichés astrographiques, les magnitudes stellaires de référence étant empruntées aux catalogues de base.

Nous envisagerons dans la suite, et afin de donner une idée du sujet, quelques exemples particulièrement simples et représentatifs de ce gende d'investigation en essayant d'en montrer les implications.

Le diagramme Hertzsprung Russell et l'évolution stellaire.

Un bon exemple de diagramme statistique dont l'interprétation a été capitale dans l'évolution des idées sur le phénomène stellaire est le diagramme H.R., ou diagramme *magnitude absolue-type spectral*. La magnitude absolue représente la quantité totale de puissance rayonnée par l'étoile. Le type spectral donne *grosso modo* la température de l'atmosphère stellaire. Bien que l'atmosphère d'une étoile ne représente que la dix-millionième partie de la masse, on observe que les points s'y groupent en *séquences* caractérisées (séquence principale, région des naines blanches, branche des géantes, supergéantes, etc.). Il va de soi que le diagramme est construit à l'aide d'étoiles dont on connaît la magnitude apparente et la parallaxe, ce qui permet d'obtenir la magnitude absolue. Dès lors, une *extrapolation* fournit un premier usage pratique du diagramme : si l'on ne connaît que le type spectral et la magnitude apparente, il suffira de reconnaître la « classe de luminosité » (appartenance à l'une des séquences, ce qui se fait à l'aide de critères spectraux) pour pouvoir estimer la magnitude absolue. La formule classique $M = m - 5 \log_{10} (r_{pc}/10)$ donne alors la distance. D'autres classifications (notamment celle à trois paramètres de Chalonge-Barbier) donnent M avec plus de précision à partir de critères uniquement spectraux mais n'ont pas conduit à autant d'implications sur le plan de l'évolution stellaire que le diagramme H.R. En effet, la séquence principale n'est autre qu'un ensemble de *points d'arrêt* dans l'évolution, l'étoile formée par condensation gravitationnelle à partir d'hydrogène (éventuellement enrichi d'éléments lourds) évoluant très vite, de haut en bas, pour atteindre la séquence principale où elle se five en raison des processus d'interaction nucléaire, l'hydrogène brûlant en hélium. Elle quitte ensuite la séquence principale en se déplaçant vers le haut dès qu'il n'y a plus suffisamment d'hydrogène à brûler. On assiste alors à la combustion de l'hélium, du carbone, etc., l'étoile gagnant la branche des géantes. D'une manière générale, les régions vides de points sont rapidement traversées, l'étoile recherchant une autre interaction nucléaire. Elle s'effondre ensuite, par interaction gravitationnelle, vers la région des naines blanches. Ainsi le diagramme H.R. représente la synthèse progressive des éléments chimiques et il existe d'ailleurs une correspondance très nette entre ce diagramme, le tableau de Mendeléev, le diagramme charge et masse nucléaire. Ainsi le diagramme H.R., dont Hertzsprung disait avec modestie qu'il l'avait constitué parce qu'il ne disposait à cette époque que de deux éléments à mettre en parallèle, est fondamental. On peut établir maintenant au cœur des étoiles, dans des conditions impossibles au laboratoire (températures de quelques millions à des milliards de degrés, densités de 100 à 10^{16} g/cm^3), la synthèse des éléments qui constituent l'univers et y lire à la fois la structure des noyaux atomiques.

Etudes géométriques et cinématiques : la statistique stellaire.

A côté des régressions d'ordre astrophysique dont bon nombre ont été étudiées (relation période-luminosité pour les Céphéides, relation masse-luminosité, etc.), il s'agit de reconnaître a) la distribution des étoiles dans l'espace, b) celle de leurs mouvements. On obtiendra ainsi les grandes lois de structure qui gouvernent la Galaxie. L'interprétation mécanique de ces lois conduira aux forces qui tiennent le système stellaire ensemble.

L'astronome ne fait aucune hypothèse *a priori* sur la forme des distributions statistiques qu'il étudie. Il est confronté avec un phénomène physique qui détermine la distribution. Les variations aléatoires qu'il suppose n'interviennent pas assez fréquemment, dans le domaine stellaire, ni avec assez d'intensité, pour faire tendre la distribution vers une structure gaussienne ou équivalente. Malgré les imperfections des données observées, il ne dispose que de celles-ci pour reconnaître sa structure. Aussi est-il conduit à utiliser largement la *méthode des moments*. Il procède en général comme suit (pour fixer les idées, nous considérons une distribution à une variable) :

a) *établissement des moments*

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_k)^n ;$$

identification de ces moments à ceux de la population observée; construction formelle de la première fonction caractéristique

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ipx}\, dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{(ip)^n}{n!} \mu_n$$

$f(x)$ étant la densité;

b) *inversion de Fourier*; si tous les moments étaient connus, la densité serait

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} \delta\,(x - x_k)$$

c) *adoucissement;* celui-ci consiste à rechercher une densité $f_r(x)$ continue positive ayant pour premiers moments $\mu_1 \ldots \mu_r$ sans hypothèse sur les suivants (leur qualité laissant d'ailleurs à désirer). On peut adoucir en développant en série *limitée* de polynômes orthogonaux, la fonction-poids étant choisie, ou par limitation de la série représentative de $\phi(p)$, ou mieux de la *seconde* fonction caractéristique, développée en série des cumulants

$$\phi(p) = \exp S(p) = \exp \{\sum \frac{(ip)^n}{n!} \lambda_n\}$$

d) *vérification*, sur l'échantillon, et extension à des échantillons plus vastes.

Cette méthode essentiellement pragmatique a effectivement pour but d'inclure la densité ou ses représentations (éventuellement son inverse de Fourier ou analogue) dans des équations différentielles ou intégrales dont on tentera la résolution.

A) *Distribution des étoiles dans l'espace.*

La relation entre magnitude apparente et absolue sera notée ici

$$M = m - R \tag{1}$$

R étant le « module de distance » ($-\infty < R < +\infty$). Les trois variables statistiques M, m, R sont liées fonctionnellement par (I) et distribuées statistiquement suivant une densité f_{MmR}. On peut écrire

$$f_{mMR} = f_m \cdot f_{(m)MR} = f_R \cdot f_{(R)M} \cdot f_{(RM)m}$$

$f_m(m)$ est accessible à l'observation car il suffit de compter photométriquement les étoiles (sur un cliché ou dans un catalogue). $f_R(R)$ représente la distribution radiale (dans une direction supposée déterminée). $f_{(R)M}$, distribution conditionnelle de M, jouit de la propriété presque toujours vérifiée d'être indépendante de R car il n'y a aucune raison autre que cosmogonique que l'éclat intrinsèque d'une étoile dépende de sa position dans la Galaxie. Enfin, $f_{(RM)m} = \delta\,(m - M - R)$ en vertu de (1), liaison fonctionnelle.

D'où

$$f_m(m) = \int f_R(R) \cdot f_M(m - R)\, dR \qquad (2)$$

convolution entre limites infinies. Une seconde convolution s'obtient en introduisant une caractéristique $\beta(R)$ (p. ex. $1/r$, la parallaxe) dont la moyenne conditionnelle

$$\bar{\beta}(m) = \int \beta(R) \cdot f_{(m)R}(m, R)\, dR$$

peut être relevée ; d'où

$$\bar{\beta}(m) \cdot f_m(m) = \int \beta(R) \cdot f_R(R) \cdot f_M(m - R)\, dR \qquad (3)$$

Les convolutions (2, 3) sont algébrisées moyennant la transformation de Fourier, qui introduit les fonctions caractéristiques qu'on développe en termes des cumulants. Ceux-ci sont donc calculés par récurrence pour f_R et f_M. Dès lors, on connaît à la fois la distribution radiale et la « fonction de luminosité » stellaire. On voit ainsi combien les deux problèmes sont intimement liés, la distribution géométrique des étoiles dans l'espace s'obtenant en même temps que la distribution physique de leur état intrinsèque. On ne sait trop pour quelles raisons les équations (2, 3) ont été appelées « équations fondamentales » de la statistique stellaire.

B) *Cinématique stellaire.*

Seules les vitesses stellaires relativement au *Soleil* sont mesurées. On peut définir évidemment la vitesse d'une étoile relativement au repère galactocentrique V_{EA} (au centre de la Galaxie), relativement au centroïde local V_{EB} (au centre du groupe *local*), et l'on a

$$V_{ES} = V_{EB} + V_{BS} = V_{EA} + V_{AB} + V_{BS}$$

V_{EB} est la vitesse « résiduelle », $V_{SB} = -V_{BS}$ celle de l'*apex* solaire (mouvement du Soleil relativement au groupe local), V_{BA} n'est autre que la vitesse de courant d'étoiles (mouvement hydrodynamique). De telles relations très simples donnent des correspondances évidentes entre moments d'ordre successifs. Les moments

$$\mu_i (S) = < V^i{}_{ES} >, \; \mu_{ik} (S) = < V^i{}_{ES} \, . \, V^k{}_{ES} >, \text{ etc.}$$

sont en principe obtenus à partir des observations. Ensuite

$$\mu_i (B) = 0, \; \mu_{ik} (S) = \mu_{ik} (B) + \mu_i (S) \; \mu_k (S), \text{ etc.}$$

$$\mu_{ik} (A) = \mu_{ik} (B) + \mu_i (A) \; \mu_k (A), \text{ etc.}$$

$\mu_i (A)$ ou bien V_{SA} n'est autre qu'un apex particulier, celui du Soleil relativement à une population fixe dans la Galaxie (ex. : la population II du halo galactique).

Dès que les moments sont connus, on peut obtenir la distribution correspondante pour les composantes de vitesse. A ce stade, on observe pourtant la nécessité de disposer de l'*ensemble* des données numériques (coordonnées angulaires, parallaxes, mouvements propres, vitesses radiales) pour chaque étoile de la population. De telles études effectuées sur les vitesses spatiales ne pourraient toucher que les étoiles proches ou intrinsèquement très brillantes. Pour les autres étoiles, les parallaxes sont inconnues et les mouvements propres généralement très imprécis. Heureusement, il est possible de remplacer les données manquantes par des données directionnelles et c'est là l'objet de la *méthode des aires*. La sphère céleste est partagée en un certain nombre d'aires limitées auxquelles on attache un trièdre local (Y) et l'ensemble est rapporté au trièdre central (p. ex. héliocentrique) désigné par (X); la matrice de passage O est connue pour chaque aire, de sorte que, pour les composantes de vitesse, $\dot{Y} = O \, . \, \dot{X}$, et pour chaque aire (p), $\dot{Y}(p) = O(p) \, . \, \dot{X}$. Dès lors, pour les moments $\mu_{ik\ldots}(p)$, (*)

$$\mu_{ijk\ldots} (p) = O_{ii'} (p) \, . \, O_{jj'} (p) \, . \, O_{kk'} (p) \; \ldots \; \mu_{i'j'k'\ldots} (\dot{X})$$

Ordinairement, les vitesses radiales sont utilisées (moments $\mu_{III\ldots}(p)$ pour chaque aire). Dès lors, un nombre suffisant d'aires permettra d'écrire des équations de condition, lesquelles, résolues par moindres carrés conformément au principe de Gauss-Markov, fourniront les moments cherchés des composantes spatiales dans le trièdre central. Divers perfectionnements peu-

(*) nous sommons sur les indices répétés.

vent être tentés, mais l'exemple, simplement esquissé, du calcul de l'apex solaire à partir des vitesses radiales suffit à faire comprendre le procédé. On n'aura ici à résoudre que les équations de condition

$$\mu_i(p) = O_{1i}(p)\ \mu_i(\dot{X})$$

d'où les équations normales

$$\sum_k [O_{1i}\ O_{1k}]\ \mu_k(\dot{X}) = [O_{1i}\ \mu_1]$$

L'exposé attire aussi l'attention sur les résidus de vitesse radiale et sur leur allure systématique dans le cas de certaines étoiles (notamment le type spectral B), les équations de condition devant être écrites sous la forme

$$\mu_1(p) = O_{1i}(p)\ \mu_i(\dot{X}) + K$$

de manière à absorber la valeur moyenne non nulle des vitesses radiales; ce terme K n'a pas reçu d'interprétation cohérente à l'heure actuelle, bien que les tentatives d'explication soient légion. On attire également l'attention sur le fait que les composantes transversales (mouvements propres) peuvent être utilisées et sur le perfectionnement qui en résulte pour les « constantes de précession », améliorant ainsi la mécanique du système solaire par des observations portant sur les étoiles.

L'usage des moments jusqu'au second ordre conduit déjà à des constatations intéressantes en cinématique de la Galaxie; à peu de choses près, tous les vecteurs d'apex relativement à des groupes distincts d'étoiles ont leurs extrémités alignées sur une droite du plan galactique et perpendiculaire à la direction Soleil-Centre du système (région du Sagittaire), ce qui s'explique aisément en admettant que les divers centroïdes sont animés de vitesses de *rotation*, le mouvement général du système stellaire s'effectuant autour d'un axe central normal au plan galactique avec une période calculable (env. 220 millions d'années). Quant aux vitesses résiduelles, elles sont distribuées autour de leur moyenne nulle d'une manière pratiquement ellipsoïdale; l'ellipsoïde des vitesses a un grand axe pointé vers le centre de la Galaxie et il s'agit ici d'une loi importante dont l'explication doit être recherchée en dynamique stellaire. Cette rotation d'ensemble est différentielle, les couches situées loin du centre tournant plus lentement, et ce nouveau fait requiert lui aussi une explication dynamique. L'utilisation des moments d'ordre supérieur conduit à diverses améliorations (déviation des vertex de Kapteyn, excès et asymétries). Une nouvelle relation importante est celle qui existe entre la dispersion et la viteses de rotation, les systèmes les plus dispersés tournant plus lentement. Pour finir, le phénomène d'*asymétrie* constaté dans la distribution mutuelle des ellipsoïdes peut s'interpréter par des considérations de moments angulaires orbitaux et de *stabilité;* la « seconde loi » de Strömberg montre que les étoiles tournant très vite sur leurs orbites galactiques ont beaucoup de chances de ne pas demeurer dans le système, le Soleil lui-même n'étant pas loin de pouvoir s'en échapper définitivement.

De telles lois empiriques ont un contenu pratique évident. En effet, si l'on a pu repérer le caractère différentiel de la rotation galactique, on connaît par le fait même la dépendance entre la vitesse radiale d'un constituant galactique, la distance et la direction. Dès lors, les observations de vitesse radiale faites dans une direction déterminée fournissent un *critère de distance* tandis que les observations d'intensité fournissent un *critère de densité*. On peut utiliser de telles relations pour interpréter notamment les profils observés de la raie interstellaire sur 21 cm de longueur d'onde (hydrogène neutre interstellaire), la déviation Doppler à partir de la longueur d'onde typique au laboratoire donnant la vitesse radiale et par suite la distance, et la hauteur du profil donnant la densité. Or, une telle raie radioastronomique est très peu sensible à l'absorption et les sondages galactiques effectués par ce moyen ont de ce fait un pouvoir pénétrant considérable. Nous voyons ainsi comment les observations astrophysiques modernes jointes aux résultats de la statistique stellaire ont permis d'établir le plan général de la Galaxie dans presque toute son étendue, alors que les observations stellaires elles-mêmes sont fortement limitées en profondeur par l'absorption des nuages cosmiques (gaz. poussières et grains interstellaires).

Interprétations théoriques.

Alors que les décomptes d'étoiles founissent, du moins en principe, la densité de distribution des coordonnées, l'étude statistique des vitesses stellaires fournit la distribution locale des composantes de vitesse. Soient respectivement $f_{r}(\underline{r})$ et $f_{(r)v}(\underline{r}, \underline{v})$ ces densités marginale et conditionnelle. Effectivement

$$f_{rv}(\underline{r}, \underline{v}) = f_{r} \cdot f_{(r)v}$$

est la *densité en phase*. Celle-ci est donc (partiellement) accessible aux observations. Il est donc évident que toute description théorique du système stellaire comportant, comme la Galaxie, un grand nombre d'individus, doit mettre en œuvre des concepts de mécanique statistique.

L'interprétation basée sur le problème des N corps (N étoiles ponctuelles s'attirant mutuellement suivant la loi de Newton) ne fournit que des indications générales sur la structure et l'évolution de la Galaxie. En particulier, le théorème du viriel et le critère de Jacobi nous montrent qu'un système stellaire autogravitant ne peut être *stable* (c'est-à-dire se maintenir en lui-même dans l'espace sans se dissocier) que si l'énergie totale des mouvements stellaires (énergies cinétique plus potentielle) est *négative*. Cette condition nécessaire de stabilité donne une condition nécessaire sur la masse du système

$$M > M_{crit} = \bar{r} \, . \, \overline{v^2}/G$$

$\bar{r}$ étant la distance moyenne interstellaire, $\overline{v^2}$ le carré de la vitesse quadratique moyenne et G la constante de gravitation. Mais le problème des N corps ne nous apprend rien sur la structure géométrique et cinétique du système. Pour progresser, des concepts de mécanique statistique sont indispensables.

Reprenons les équations du mouvement d'une étoile individuelle dans un champ de potentiel $V(r)$; ces équations ont la forme

$$\dot{r} = v ; \; \dot{v} = -\partial_r V$$

Si $f(r, v) = f_{rv}$ désigne la densité dans l'espace des phases, la conservation du nombre de particules par unité d'extension en phase donne ici l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t f + v \, . \, \partial_r f - (\partial_r V) \, . \, \partial_v f = 0 \tag{4}$$

à condition qu'il n'y ait entre étoiles que des interactions rapprochées négligeables (ceci est généralement adéquat pour la Galaxie, mais ne s'applique qu'aux systèmes peu denses). Le système différentiel est complété si l'on tient compte du fait que c'est la densité spatiale qui crée le potentiel :

$$\Delta V = 4 \pi G M \int f \, d^3 v \tag{5}$$

Ainsi les équations (4, 5) constituent un système différentiel qui doit permettre en principe de calculer la structure du système stellaire à tout instant si l'on connaît cette structure à un instant considéré comme initial. L'intégration n'en est pas commode et n'a été réussie que dans les cas où il existe des symétries (symétries centrales, symétries axiales), celles-ci donnant des intégrales premières du mouvement. D'une manière générale, la tendance actuelle consiste à utiliser ces intégrales premières dans des développements en série du type

$$f = \sum a_k I_k + \sum \sum a_{kl} I_k I_l + \dots$$

Ces développements sont injectés dans (4, 5) et les coefficients sont calculés de manière à satisfaire à la fois à l'équation de Liouville-Boltzmann sans second membre (4) et à l'équation de Poisson (5). Mais on peut rechercher aussi des intégrales premières qui soient liées au caractère observé de la distribution des vitesses. Par exemple, le cas simple où la distribution est supposée ellipsoïdale est traité facilement

$$f = \phi\ (a_{ik}\, v_i\, v_k + \ldots)$$

la forme quadratique inhomogène aux composantes de vitesse sous la fonction arbitraire ϕ devant être elle-même une intégrale première pour un système *stationnaire* (∂_t négligés). On obtient ainsi, par (4), un système différentiel aux caractéristiques a_{ik}, ... qui peut être intégré. En voici la solution pour un système stellaire à symétrie axiale (Q désigne cette forme quadratique) :

$$Q = \frac{V_r^2}{\alpha^2} + \frac{(V_\theta - V_{\theta 0})^2}{\beta^2} + \frac{V_z^2}{\gamma^2} + Q_0\,(r, z)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{a_0}\ ; \quad \beta^2 = \frac{1}{a_0 + a'_0\, r^2}\ ; \quad \gamma^2 = \frac{1}{a''_0} \qquad (a_0\,,\ a'_0\,,\ a''_0 \text{ constantes})$$

$$V_{\theta 0} = -\frac{a'_0\, r}{a_0 + a'_0\, r^2}$$

V_r, V_θ, V_z désignent les composantes de vitesse respectivement dans la direction radiale du plan galactique, dans la direction transversale et suivant la verticale du plan. On voit ainsi que l'ellipsoïde de vitesse pointera toujours vers le centre galactique, que cet ellipsoïde est centré sur le point moyen (0, $V_{\theta 0}$, 0) et que la vitesse transversale moyenne est bien une vitesse de rotation autour d'un axe central. Si l'on écrit cette dépendance sous la forme

$$V_{\theta 0} = \Omega\,(r)\,.\,r$$

alors on constate sur la solution que

$$\frac{r}{2}\,\frac{d\Omega}{dr} = \Omega\,(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2})$$

Or, la quantité au premier membre est accessible aux observations (rotation différentielle de la Galaxie), tandis que les différents termes du second membre sont aussi mesurables. Il existe donc une relation entre le caractère différentiel de la rotation galactique et les dispersions, cette relation pouvant servir au contrôle de la théorie.

Quelques remarques s'imposent quant au caractère du potentiel V introduit dans les équations. Pour un système de masses discrètes distribuées d'une manière aléatoire, ce potentiel doit-il encore être considéré comme une fonction ordinaire des coordonnées, ou bien ne faut-il pas l'envisager plutôt comme une variable aléatoire ?

La situation paraît bien la suivante : V est lié à la densité massique ρ par l'équation de Poisson

$$\Delta V = 4 \pi G \rho$$

Pour un système de masses discrètes (toutes égales à m) occupant des emplacements $\underline{r}_a$ ($a = 1, 2, \ldots, N$) la densité est

$$\rho = m \sum_{a=1}^{N} \delta\, (\underline{r} - \underline{r}_a)$$

En représentant les fonctions δ par des intégrales de Fourier

$$\rho = \frac{m}{(2\pi)^3} \sum_{a=1}^{N} \int e^{-i\underline{k}(\underline{r} - \underline{r}_a)}\, d^3 \underline{k}$$

on obtient aisément la solution correspondante

$$V(r) = -\frac{4\pi G m}{(2\pi)^3} \sum_{1}^{N} \int \frac{d^3 k}{|k|}\, e^{-i\underline{k}(\underline{r} - \underline{r}_a)} = -G m \sum_{1}^{N} \frac{\sigma\, |\underline{r} - \underline{r}_a|}{|\underline{r} - \underline{r}_a|} \tag{6}$$

où σ est la fonction-signe (notons en passant que la self-énergie gravitationnelle du système est ainsi complètement évitée).

Mais on adopte une description statistique dans laquelle la distribution spatiale des masses est représentée par $f_r(\underline{r})$. En conséquence, toutes les variables $r_1 \ldots r_N$ sont distribuées suivant f_r, et comme on peut permuter chaque étoile mutuellement sans changer le système, ces variables sont stochastiquement indépendantes, la distribution couplée étant simplement

$$F = \prod_{a=1}^{N} f_r(\underline{r}_a)$$

Nous avons donc à considérer 3 N variables $r_1 \ldots r_N$ et une variable supplémentaire $V(r, r_1 \ldots r_N)$ liée fonctionnellement à celles-ci par (6). En résultat, les *valeurs* du potentiel en chaque point spécifié r sont distribuées suivant la densité

$$f_v(V) = \int \prod_{a=1}^{N} f_r(\underline{r}_a) \cdot \delta \left(V + G m \sum \frac{\sigma(\underline{r} - \underline{r}_a)}{|\underline{r} - \underline{r}_a|}\right) d^3 r_1 \ldots d^3 r_N$$

On peut en déterminer la fonction caractéristique

$$\phi_v = \int f_v \, e^{ipV} \, dp = \left| \int f_r(\underline{r}') \exp(- ip\,G\,m \frac{\sigma\,|\underline{r} - \underline{r}'|}{|\underline{r} - \underline{r}'|}) \, d^3\underline{r}' \right|^N$$

et les cumulants en posant

$$\phi_v = e^{\sum \frac{(ip)^n}{n!} \lambda_n(v)} ;$$

$$\int f_r(\underline{r}')\, e^{(- ip\,G\,m \frac{\sigma(\underline{r} - \underline{r}_a)}{|\underline{r} - \underline{r}'|})} \, d^3\underline{r}' = e^{\sum \frac{(ip)^n}{n!} X_n(\underline{r})}$$

d'où simplement

$$\lambda_n = N\,X_n$$

Soit

$$J_1 = \int \frac{\rho(\underline{r}')\, d^3\underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} ; \ldots ; J_n = \int \frac{\rho(\underline{r}')\, d^3\underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^n} ; \bar{\rho} = Nm\,f_r(\underline{r})$$

Alors

$$\lambda_1 = -G\,J_1 ; \quad \lambda_2 = \frac{G^2}{N} \{M\,J_2 - J_1^2\};$$

$$J_3 = \frac{G^3}{N^2} \{-M^2\,J_3 + 3\,M\,J_2\,J_1 - 2\,J_1^3\}, \text{ etc.}$$

Les cumulants peuvent être ainsi évalués à partir d'intégrales simples calculables si l'on connaît la densité moyenne. Notons que λ_1 satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta\,\lambda_1 = 4\,\pi\,G\,\bar{\rho}$$

M représente la masse totale Nm finie du système; aussi λ_2, λ_3 etc. tendront-ils généralement vers zéro quand N augmente indéfiniment. Ainsi les valeurs locales du potentiel présentent-elles un « bruit de fond » qui s'atténue à mesure que le système devient plus peuplé. Le système est évidemment coupé dès que les valeurs du potentiel deviennent positives, c'est-à-dire dès que le bruit de fond coupe l'axe r dans le diagramme (V, r). Ceci définit pour le système stellaire un diamètre effectif. De plus, les trajectoires stellaires elles-mêmes, gouvernées par le potentiel, deviennent aléatoires en ce sens qu'à une situation initiale correspondra une distribution statistique de positions successives, celle-ci créant $f_r(r)$.

En résumé, cette conception statistique paraît offrir une vision plus vaste de la dynamique stellaire, mais demanderait à être traitée avec plus de détails.