AIDE A LA DECISION MULTICRITERE

Bernard ROY
France

Philippe VINCKE et J-Pierre BRANS
Belgique.

Cet article est destiné à servir d'introduction à la Table Ronde consacrée à "L'Aide à la Décision Multicritère : Applications administratives, économiques et industrielles", les 2, 3 et 4 mars 1976.

Cette Table Ronde est organisée par la SOGESCI, Société Belge pour l'Application des Méthodes Scientifiques de Gestion en collaboration avec l'AFCET, Association française pour la Cybernétique économique et technique.

1. *Introduction.*

a. Nature d'un problème de décision.

- Un problème de décision est un problème dans lequel on considère un domaine K d'actions réalisables parmi lesquelles il faut

. soit choisir une seule action, considérée comme la meilleure,

. soit choisir toutes les actions "bonnes" parmi celles étudiées,

. soit choisir quelques actions parmi les "meilleures" étudiées.

L'ensemble K des actions réalisables peut être défini

. soit de façon énumérative, c'est-à-dire au moyen d'une liste,

. soit à l'aide de contraintes mises sous forme mathématique.

Il peut être fini ou infini, fixé ou évolutif.

Exemples.

1. Une entreprise doit choisir un emplacement pour la localisation d'un entrepôt : sept endroits sont possibles.
Chaque endroit représente donc une action; l'ensemble K contient sept éléments, il est fini, défini de façon énumérative; il est fixé si, au cours du processus de décision, aucun nouvel endroit ne peut être considéré.

2. Considérons un problème de distribution ou plus particulièrement le problème du voyageur de commerce, qui doit passer une et une seule fois dans chacune des N villes d'un réseau. L'ensemble K contient (N-1) ! éléments : ce sont les circuits hamiltoniens d'un graphe à N sommets.
Dans ce cas, K est fini, fixé et défini par des contraintes.
(Contrainte d'avoir un circuit hamiltonien).

3. Dans un programme linéaire, l'ensemble des actions est défini par

$$K = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\};$$

il est donc infini et défini par des contraintes.
Il est évolutif, si, au cours de la procédure de choix, des modifications peuvent être apportées aux contraintes.

- Le choix des actions de K se fait au moyen d'un ou plusieurs critères.
Un critère est généralement une fonction f_1

$$f_1 : K \to \mathbb{R},$$

qui attribue à toute action $x \in K$ une valeur réelle.

On peut alors faire la distinction entre un *problème unicritère* et un problème *multicritère.*

Problème unicritère. Il s'agit de trouver l'action réalisable x, *appelée action optimale, qui donne au critère unique* f_1 *, la valeur numérique la plus favorable* (maximum ou minimum selon le cas).

En termes mathématiques, il faut trouver $\tilde{x}$ tel que :

$$f_1(\tilde{x}) = \text{opt}\ \{f_1(x) \mid x \in K\}$$

Généralement un problème de décision unicritère est un problème mathématique bien posé, en ce sens que l'on dispose d'outils mathématiques suffisants pour résoudre les 3 problèmes fondamentaux de l'Analyse, à savoir :

Existence de la solution
Unicité éventuelle de la solution
Construction de la solution.

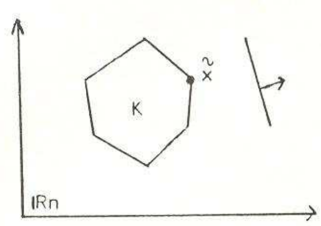
La construction de la solution est en fait *un processus de sélection* d'une action de K.

Le processus de sélection dans un problème unicritère est généralement un algorithme. On distingue trois types d'algorithmes : des *algorithmes exacts*, des *algorithmes approximatifs* et des *algorithmes heuristiques.*

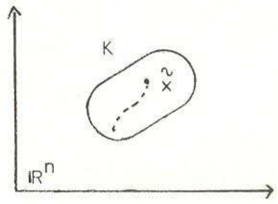
Algorithme exact : C'est un algorithme qui fournit la solution optimale $\tilde{x}$ du problème de décision en un nombre fini de pas.
Pour un programme linéaire

$$\min\ \{cx \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$$

on dispose de plusieurs algorithmes exacts, par exemple l'algorithme du Simplexe.



Algorithme approximatif : C'est un algorithme qui fournit en un nombre fini de pas une solution proche de la solution optimale. C'est par exemple le cas d'un algorithme qui fournit la solution optimale en un nombre infini de pas et qui est convergent. On convient de s'arrêter après un nombre fini de pas lorsque une approximation suffisante est atteinte.



De tels algorithmes existent souvent en programmation convexe ou non linéaire en général du type

$$\min \{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ x \geq 0,\ i=1,2 \ldots m\}$$

Algorithme heuristique : C'est un algorithme qui ne se justifie pas sur le plan des principes mathématiques mais qui est souvent utile en pratique. Il fournit une solution valable compte tenu de la structure particulière du problème. Un bon algorithme heuristique fournit souvent la solution optimale, mais rien ne permet d'affirmer mathématiquement qu'il en est bien ainsi. Un algorithme heuristique s'emploie lorsque l'on ne dispose pas d'algorithme exact ou lorsque l'algorithme exact est trop long.

Exemple de Problème unicritère : supposons que x $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ soient les différents niveaux d'activités de n mines. Il faut satisfaire des contraintes de demande et de capacité qui peuvent s'écrire

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \ ;\ x_{ik} \geq 0,\ i = 1 \ldots m,\ k = 1 \ldots n \ ;$$

et on se propose de minimiser les coûts de production $c_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Un tel problème est un programme linéaire classique.

$$\min \{c\, x \mid A\, x \leq b,\ x \geq 0\}$$

dont la solution optimale peut aisément être trouvée par un algorithme exact.

Problème multicritère. Il s'agit cette fois de considérer un domaine d'actions réalisables K *et de prendre en compte non pas un critère unique mais* p *critères* $f_1, f_2, \ldots f_p$ *. Le problème est alors de trouver une action réalisable* $x \in K$ *qui donne à l'ensemble des* p *critères une valeur numérique aussi favorable que possible.*

Introduisons le vecteur

$$F(x) : (f_1(x),\ f_2(x) \ldots f_p(x)),$$

dès lors le problème multicritère peut être formulé de la façon suivante :

opt $\{F(x) \mid x \in K\}$.

C'est ce que les Anglo-Saxons appellent le V.O.P. (vector optimisation problem).

Exemple : Un problème multicritère apparaît dès que le décideur demande à l'homme d'étude de satisfaire plusieurs objectifs.

Problème de production : Dans le problème de production énoncé ci-dessus le décideur peut demander à l'homme d'étude de trouver la solution
qui minimise les coûts de production
qui maximise les bénéfices
qui minimise les investissements ...

Problème du voyageur de commerce : il s'agit de trouver un circuit hamiltonien passant par N villes. Généralement, on cherche le circuit de longueur minimum mais on peut s'intéresser à :

- la minimisation du nombre de km parcourus
- la minimisation du temps de parcours
- la minimisation des frais de déplacement
- la minimisation de l'usure du matériel ...

il faut remarquer qu'il n'existe généralement pas de solution réalisant l'optimum de toutes les fonctions économiques simultanément; en fait, un problème multicritère est un problème mathématiquement mal posé. Pour mettre ce fait capital en évidence, considérons l'exemple suivant.
Supposons que le domaine des actions réalisables soit :

$$K : \{x \mid A\,x \leq b,\ x \geq 0\}$$

et que p fonctions économiques doivent être maximisées.

Soient c_1x, c_2x, ... c_hx, ... c_px ces p fonctions économiques avec

$$c_h : (c_{h1}, c_{b2}, \dots c_{hj} \dots c_{hn}) \qquad h = 1, 2, \dots p\,.$$

Si on résout séparément les p programmes linéaires

$$\max \{c_hx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \qquad h = 1,2 \dots p.$$

on obtient p solutions optimales $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, ..., $\tilde{x}_h$, ... $\tilde{x}_p$, qui en général ne sont évidemment pas confondues.

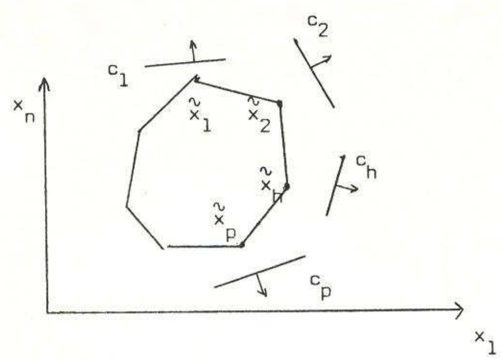
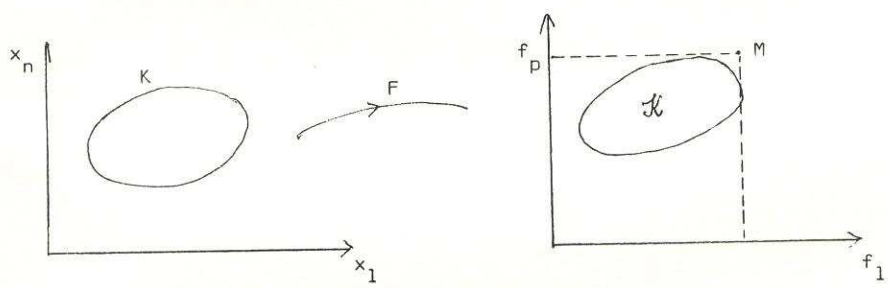


Image de K *dans l'espace des critères.*

Il peut être intéressant de considérer l'espace R^p et de représenter dans cet espace l'image de K par F.
L'image de $x \in K$ dans cet espace sera donc le point de coordonnées

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ \dots\ f_p(x)) \ .$$

Soit $\mathcal{K}$ l'image de K ainsi obtenue.



Le point M de coordonnées

$$(\ \underset{x \in K}{\text{opt}}\ f_1(x),\ \underset{x \in K}{\text{opt}}\ f_2(x),\ \dots\ \underset{x \in K}{\text{opt}}\ f_p(x)\ )$$

sera en général un point en-dehors de $\mathcal{K}$, c'est ce que nous venons d'exprimer en disant qu'il n'existe généralement pas de solution réalisant l'optimum de toutes les fonctions économiques simultanément.

Nous verrons que certaines méthodes consistent à rechercher la solution $x \in K$ dont l'image $F(x) \in \mathcal{K}$ est la plus proche de M au sens d'une certaine distance, celles prises en considération par les auteurs sont L_1, L_2, ... L_∞, d'autres encore.

b. Homme d'étude et décideur. Préparation et prise de décision.

Poser un problème de décision dans une entreprise (ou dans une administration à l'état ...) c'est essentiellement considérer le domaine K. On peut se demander qui dans l'entreprise formule, définit ou limite K.

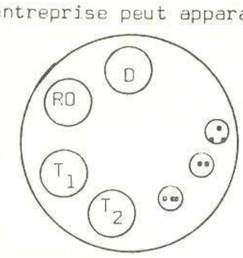
Essentiellement deux personnes ou types de personnes entrent en jeu : le décideur et l'homme d'étude.

Le *décideur* est celui auquel appartient en définitive le pouvoir de choisir la solution. Ce choix se fait ou ne se fait pas sur base de l'avis de l'homme d'étude.

L'homme d'étude est celui qui s'efforce de formuler K (soit de façon énumérative, soit en écrivant les contraintes qui limitent K) sur base d'informations générales puisées dans l'entreprise et d'informations particulières fournies par le décideur. Dès que K est formulé, l'homme d'étude s'efforce de déterminer judicieusement une action $\tilde{x} \in K$ qui sera proposée au décideur comme solution du problème de décision.

L'homme d'étude est donc chargé d'un rôle *d'analyse* et de modélisation du problème tandis que le *décideur* détient le pouvoir de prendre la *décision définitive*.

Ainsi pour ce qui concerne un problème de décision, la structure d'une entreprise peut apparaître de la façon suivante. L'entreprise contient un



centre de décision (D), un centre d'Analyse (R.O) et différentes cellules techniques T_1 T_2 ... qui varient selon la nature de l'entreprise.

Le *centre de décision* ou de décideur subit les *pressions politiques* intérieures et extérieures qui s'exercent sur l'entreprise. Il fournit des données au centre d'Analyse ou à l'homme d'étude en le chargeant d'étudier tel ou tel problème de décision. Le *centre d'Analyse* travaille *à l'abri des pressions politiques*, en conservant une très large indépendance de pensées et propose au décideur les *décisions* qu'il juge *favorables*.

Les rapports entre le décideur et l'homme d'étude ne sont pas toujours excellents.

Lorsqu'il s'agit de problèmes de décisions purement *techniques* (vitesse d'un ventilateur, nombre de wagonnets accrochés à une rame) la solution proposée par l'homme d'étude est généralement *admise et suivie* par le décideur.

Il arrive même pour bien des problèmes techniques que tout se passe sans l'intervention du décideur.
Au niveau technique les rapports décideur-homme d'étude sont donc excellents.

Par contre il n'en est plus toujours de même au niveau politique. (Investissements, Création de nouvelles divisions, Prospection de nouveaux marchés, Nouvelles sources d'approvisionnement de matières premières ...). Il arrive fréquemment que le décideur s'écarte totalement de la solution proposée par l'homme d'étude.

Cette situation est due la plupart du temps au fait que les problèmes que formulent l'homme d'étude sont des *problèmes unicritères* alors que les problèmes qui se posent en fait sont des *problèmes multicritères.*

L'Analyse multicritère qui est la tendance la plus récente de la recherche opérationnelle est donc de nature à améliorer les rapports entre le décideur et l'homme d'étude et à lever une bonne part de l'incompréhension qui existe entre ces deux cellules de l'entreprise.
En conclusion, le rôle de l'homme d'étude consiste de plus en plus *à aider le décideur dans son choix* (au moyen d'une modélisation et une analyse adéquates du problème multicritère) plutôt que de *proposer des choix* au décideur (par l'optimisation d'un critère unique peu représentatif des objectifs poursuivis).

c. Différentes approches dans le traitement des problèmes multicritères.

Considérons le problème multicritère suivant :

$$\text{opt } \{F(\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in K\}$$

où K est l'espace des décisions réalisables et où :

$$F(x)\ \{f_1(x),\ f_2(x)\ \ldots\ f_p(x)\}$$

est un ensemble de p fonctions que l'on se propose de maximiser.

Deux écoles distinctes ont étudié ce genre de problèmes. L'école d'inspiration américaine (Kuhn et Tucker-Geoffrion) et l'école d'inspiration française (Roy).

L'école américaine s'est principalement intéressée aux propriétés des programmes multicritères. La contribution essentielle de cette école est d'avoir mathématisé le problème, d'avoir étudié des conditions nécessaires et suffisantes permettant de caractériser certains types de solutions, d'avoir généralisé les conditions de Kuhn et Tucker à des problèmes multicritères, d'avoir défini les solutions appelées solutions efficaces qui jouent un rôle important dans cette théorie.

Précisons que Kuhn et Tucker dans les "Proceedings of the second Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability" en 1951 dans un article intitulé "Non Linear Programming" avaient déjà introduit le V.M.P. (vector maximisation problem) et défini des solutions efficaces. Pourtant le problème n'a pratiquement pas été étudié pendant 15 ans et il a fallu attendre 1966 pour voir GEOFFRION reprendre les travaux de Kuhn et Tucker et publier des résultats intéressants.

L'école française est plus pragmatique et ne s'est guère intéressée à la généralisation des conditions de Kuhn et Tucker.
Par contre, elle a permis la mise au point de nombreux traitements de problèmes multicritères. Les méthodes proposées sont très nouvelles, elles encouragent le dialogue homme d'étude-décideur et permettent déjà le traitement de nombreux cas concrets. L'école française est extrêmement créatrice, elle a ouvert de nouvelles voies en Recherche Opérationnelle qui sont très proches des besoins réels des utilisateurs.

Autant l'école française est créatrice et novatrice de courants nouveaux, autant l'école américaine est restée classique et a prolongé les anciennes théories. Il faut pourtant se garder d'accorder trop d'importance à cette classification en école française et américaine. Il est clair en effet que les échanges d'idées sont nombreux et que l'une s'est souvent préoccupée des thèmes de l'autre.

2. *Solutions efficaces.*

a. Définition :

Considérons le problème multicritère suivant :

$$\max_{x \in K} \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\}.$$

Nous dirons que x *domine* x'*au sens large* si

$$f_h(x) \geq f_h(x'), \qquad h = 1,2,\dots, p$$

et x *domine* x' *au sens strict* si

$$f_h(x) \geq f_h(x'), \quad \forall i ,$$

l'une des inégalités au moins étant stricte.

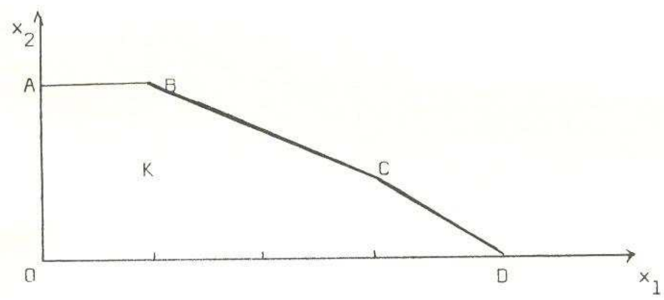
L'action $x \in K$ est dite *efficace* s'il n'existe aucune autre action de K qui domine x au sens strict.
Une action x non efficace présente évidemment peu d'intérêt pour le décideur puisqu'il existe une action meilleure que x simultanément sur tous les critères. C'est donc dans l'ensemble des actions efficaces que doit se faire le choix définitif.
L'ensemble des actions efficaces peut être très vaste (il peut même arriver que toutes les actions soient efficaces).

Exemple.

Considérons le problème bicritère suivant :

$$\begin{cases} \max x_1, \\ \max x_2 , \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 , \\ x_1 + x_2 \leq 4 , \\ \quad x_2 \leq 2 , \\ x_1, x_2 \geq 0 . \end{cases}$$

Graphiquement, on obtient aisément K.



Il est facile de voir dans ce cas-ci que tous les points des segments BC et CD sont solutions efficaces.
Observons également que les points de AB ne sont pas solutions efficaces, car sans changer la valeur du 2d critère on peut améliorer la valeur du premier en se déplaçant de A vers B. Enfin observons que D est la solution optimale du problème unicritère où l'on ne considère que le 1er critère, et que B est une des solutions optimales du problème où l'on ne considère que le 2d critère. On constate aussi que les solutions des problèmes unicritères ne sont pas nécessairement toutes efficaces.

b. Caractérisation et recherche des solutions efficaces.

Soit le vecteur

$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots f_h(x) \dots f_p(x)\}$$

et considérons le problème multicritère associé

$$\max \{F(x) \mid x \in K\} .$$

Construisons la fonction

$$R(x) = \sum_{h=1}^{p} \lambda_h f_h(x) \text{ , avec } \lambda_h > 0, \quad h = 1, \dots p, \ \sum_{h=1}^{p} \lambda_h = 1$$

et considérons le problème unicritère suivant :

$$\max \{R(x) \mid x \in K\}.$$

Si $\tilde{x}$ est solution optimale de ce problème unicritère alors $\tilde{x}$ est solution efficace du problème multicritère. Il en résulte une condition suffisante pour qu'une solution x *de* K *soit efficace.*

Démonstration :

Supposons que $\tilde{x}$ ne soit pas efficace, dans ce cas il existe une solution $x \in K$ telle que :

$$f_h(x) \geqslant f_h(\tilde{x}) \qquad h = 1,2, \dots p .$$

$$f_h(x) > f_h(\tilde{x}) \qquad \text{pour au moins un } h.$$

En multipliant chacune de ces inégalités par $\lambda_h > 0$ et en faisant la somme, il vient :

$$\sum_{h=1}^{p} \lambda_h f_h(x) > \sum_{h=1}^{p} \lambda_h f_h(\tilde{x})$$

et par conséquent $\tilde{x}$ n'est pas la solution optimale du problème $\max \{R(x) | x \in K\}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Il s'en suit que $\tilde{x}$ doit forcément être efficace.

Sous certaines conditions, généralement satisfaites dans les cas concrets, (ensemble K convexe et fermé, fonctions convexes ...) il est possible de montrer que la condition ci-dessus est aussi nécessaire.
Sous ces conditions, *la condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{x}$ soit un point efficace d'un problème multicritère est qu'il existe des constantes* $\lambda_h > 0$, $h = 1,2 \dots p$ *telles que $\tilde{x}$ soit la solution optimale du problème* unicritère $\max \{ \sum_{h=1}^{p} \lambda_h f_h(x) \mid x \in K\}$.

Il en résulte que la recherche de solutions efficaces se ramène à un problème de paramétrisation de la fonction économique d'un problème unicritère. Ce problème n'est pas résolu dans le cas général mais il est résolu entièrement dans le cas linéaire, dans ce cas nous avons :

$$K : \{x \mid A\,x \leqslant b,\ x \geqslant 0\},$$
$$f_h(x) = c_h.x \quad ,\ h = 1,2 \dots p\ .$$

et le problème unicritère paramétré est :

$$\max \{ \sum_{h=1}^{p} \lambda_h c_h.x \mid A\,x \leqslant b,\ x \geqslant 0,\ \lambda_h > 0, \quad h = 1, 2 \dots p\}.$$

Plusieurs méthodes ont été proposées pour trouver les solutions efficaces de programmes mathématiques à plusieurs fonctions économiques, en particulier par Philip , Evans et Steuer et Zeleny .

Les caractérisations des solutions efficaces, sous formes de conditions de Kuhn et Tucker généralisées, ont été étudiées par l'école américaine, et en particulier par Geoffrion .

Remarquons cependant que la détermination des solutions efficaces d'un problème multicritère ne résout pas le problème. Comme nous l'avons dit, l'ensemble des solutions efficaces peut être très vaste et rien ne permet d'affirmer, à partir des seules données du problème que telle solution efficace est meilleure que telle autre.

Nous nous proposons de décrire, dans le paragraphe suivant, quelques approches qui ont été définies en vue d'aider le décideur à faire son choix.

3. *Traitement des problèmes multicritères.*

Nous distinguerons 4 types de traitements de problèmes multicritères, en vue de la détermination d'un compromis final.

a) 1er type : *Hiérarchisation des critères.*

Considérons le problème multicritère

$$\max \{F(x) \mid x \in K\}$$

où $F(x) : \{f_1(x),\ f_2(x),\ \dots\ f_h(x),\ \dots\ f_p(x)\}$.

Supposons que le décideur admette que les critères soient classés par ordre d'importance décroissante. A ses yeux le critère $f_1(x)$ est plus important que le critère $f_2(x)$ et ainsi de suite ... On dit alors que les critères sont hiérarchisés.

Le problème peut alors être traité de la façon suivante :

Résoudre le problème unicritère

$$\max \{f_1(x) \mid x \in K\} .$$

Soit $\tilde{K}_1$ l'ensemble des solutions optimales de ce problème. $\tilde{K}_1$ devient l'ensemble sur lequel on décide. On résout alors le problème unicritère suivant :

$$\max \{f_2(x) \mid x \in \tilde{K}_1\}$$

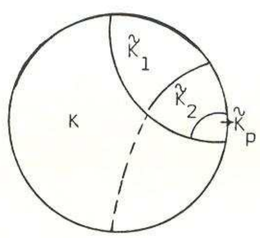
On est évidemment assuré que la solution de ce 2e problème maximise encore $f_1(x)$ sur K, ce qui est normal puisque c'est au critère $f_1(x)$ que l'on a attribué le plus d'importance. Parmi les solutions qui maximisent $f_1(x)$ on cherche alors la solution la plus favorable pour $f_2(x)$. Celle-ci ne maximise pas nécessairement $f_2(x)$ sur K, mais seulement $f_2(x)$ sur $\tilde{K}_1$. Soit $\tilde{K}_2$ le sous-ensemble de $\tilde{K}_1$, de solutions qui maximisent $f_2(x)$ sur $\tilde{K}_1$. On résout alors le problème suivant

$$\max \{f_3(x) \mid x \in \tilde{K}_2\}$$

et ainsi de suite.

On détermine ainsi une suite d'ensembles emboîtés les uns dans les autres $K, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \ldots \tilde{K}_h \ldots \tilde{K}_p$

Toute solution appartenant à $\tilde{K}_p$ est alors solution du problème de décision.



Cette méthode est valable dans la mesure où l'on peut vraiment hiérarchiser les critères à un point tel qu'il faille nécessairement d'abord optimiser sur l'un et ne considérer pour les suivants que les solutions optimales du premier.

D'autre part même si les critères sont réellement hiérarchisés de la sorte il arrivera fréquemment que la suite K $\tilde{K}_1$ $\tilde{K}_2$ ... se réduise très vite à un point, ce qui ne laisse plus aucun choix pour les critères suivants. En programmation linéaire par exemple il arrivera souvent que $\tilde{K}_1$ se réduise d'emblée à un seul point ce qui ne laisse aucune latitude aux critères suivants et l'on n'a en fait résolu qu'un problème unicritère.

Cette méthode est utilisée par exemple en média-planning (méthode MOISE) mais il faut remarquer qu'il est possible de tenir compte de plusieurs critères parce que l'on ne détermine pas vraiment des sous-ensembles de solutions optimales mais seulement des sous-ensembles de "bonnes" solutions qui sont évidemment beaucoup plus vastes que des sous-ensembles optimaux.

b) 2e type : Agrégation des p critères en un critère unique.

1°) Fonction d'utilité ou fonction de valeur.

Supposons que

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_p(x)$$

soient les p critères d'un problème multicritère.

Si le décideur parvient à formuler ses préférences de façon telle que les p critères puissent être agrégés en une fonction unique

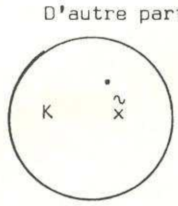
$$V(x) = V(f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_p(x))\ ,$$

alors le problème est ramené à un problème unicritère

$$\text{opt}\ \{V(x)\ |\ x \in K\}$$

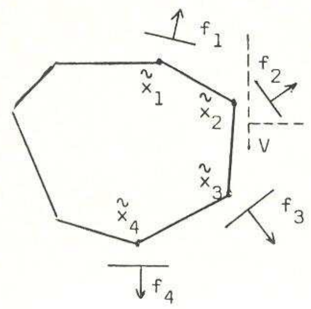
puisque V(x) est une fonction de x. V(x) est souvent appelée *fonction d'utilité* ou fonction de valeur.

D'autre part, quand une décision est choisie dans K, il est facile de montrer à postériori qu'il existe toujours au moins une fonction d'utilité qui eut fourni cette solution comme solution optimale. Il en existe d'ailleurs une infinité. On peut en déduire que pour tout problème de décision il existe toujours la fonction d'utilité adéquate.



Hélas ceci n'est qu'un raisonnement à posteriori et la construction d'une fonction d'utilité rendant vraiment compte des préférences du décideur nécessite généralement un travail démesuré. Dans certains cas il faut des études extraordinairement fouillées pour aboutir à une fonction d'utilité et l'on préfère renoncer.

Observons aussi, dans le cas linéaire par exemple, qu'une fonction d'utilité linéaire peut fournir la solution optimale d'un des problèmes unicritères



associés. Tout revient alors à négliger carrément tous les autres critères. Aucun compromis n'a été trouvé et le critère ainsi avantagé l'est dans une trop forte mesure.
Dans le cas du dessin, la solution obtenue à l'aide de la fonction d'utilité se confond avec $\tilde{x}_2$. Seul en fait le 2d critère a ainsi été pris en considération.
En plus de ces inconvénients on peut dire que la fonction d'utilité n'est pas stable dans l'esprit du décideur. Il suffit que celui-ci attribue un tout petit peu plus d'importance à un critère pour changer considérablement la fonction d'utilité. Or il se fait que les appréciations du décideur sur l'importance des critères sont extrêmement variables dans le temps. Il en résulte une grande instabilité des fonctions d'utilité.

L'emploi de fonctions d'utilité semble donc présenter au moins 3 désavantages :

. Elles sont difficiles à construire .
. Elles avantagent souvent exagérément un critère sans le vouloir à priori.
. Elles manquent de stabilité dans l'esprit du décideur.

2°) Fonction d'utilité implicite. Taux de substitution. Méthode de GEOFFRION.

Geoffrion [7] s'est alors efforcé de développer une théorie où les informations sur la fonction d'utilité sont moindres. Cette théorie est basée sur les taux de substitution.

Considérons un ensemble de valeurs pour les p critères.
Soient $(f_1, f_2, \dots f_h \dots f_p)$ ces valeurs. Supposons qu'elles correspondent à un point réalisable.
Le taux de substitution du k^e critère par rapport au l^e critère en ce point est la quantité Δf_{kl} que le décideur est prêt à concéder pour gagner une unité sur le l^e critère.
C'est donc la quantité Δf_{kl} telle que les 2 ensembles de valeurs des p critères qui suivent soient considérés comme équivalents par le décideur :

$$(f_l\ f_2 \dots f_k \dots f_p) \sim (f_l+1 \quad f_2 \dots f_k - \Delta f_{kl} \dots f_p) .$$

Il est facile de montrer que si V est la fonction d'utilité du décideur, alors

$$\Delta f_{kl} = \frac{\partial V/\partial f_k}{\partial V/\partial f_l}$$

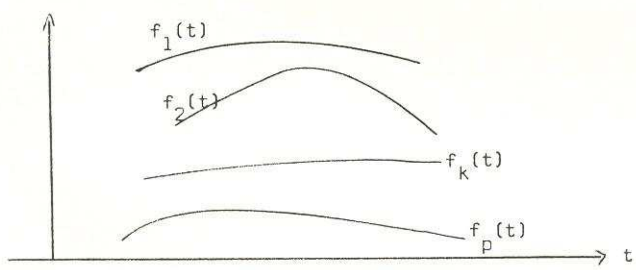
Comme la direction qui maximise la croissance de V est donnée par le gradient de V, c'est-à-dire le vecteur

$$\left(\frac{\partial V}{\partial f_1} \dots \frac{\partial V}{\partial f_k} \dots \frac{\partial V}{\partial f_p}\right),$$

la connaissance des taux de substitution permet de déterminer cette direction.

Une méthode interactive a été construite par DYER pour essayer d'estimer les taux de substitution.

On peut alors demander au décideur de combien il souhaite se déplacer dans cette direction, et ce, à partir du graphique suivant qui donne les variations des différents critères en fonction du déplacement t dans la direction choisie



Cette méthode, mathématiquement très séduisante, semble cependant très peu applicable en pratique, les phases de décision (détermination des taux de substitution et de l'amplitude du déplacement dans la direction choisie) étant très difficiles pour le décideur.

3°) Goal Programming.

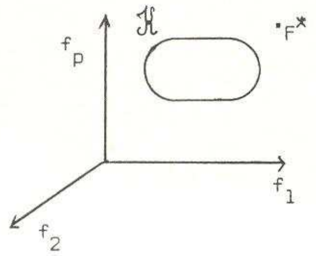
Une autre façon d'agréger les critères est de procéder de la façon suivante : On considère pour tout $x \in R$ les p critères

$$F(x) = f_1(x),\ f_2(x),\ \dots\ f_h(x)\ \dots\ f_p(x)$$

et l'on se fixe sur chaque critère un certain objectif

$$F^* : f_1^*,\ f_2^* \dots f_h^* \dots f_p^*$$

Considérons à nouveau le domaine $\mathcal{K}$ dans un espace à p dimensions dont les composantes sont f_1, f_2 ... f_p. Si $F^* \in \mathcal{K}$, le problème est résolu et l'objectif est réalisable. En général, le décideur sera trop exigeant et F^* sera situé en dehors de $\mathcal{K}$. On peut alors s'efforcer de rechercher le point $F(x)$



tel que la distance de $F(x)$ à F^* soit minimum pour $F \in \mathcal{K}$ ou $x \in K$.

On est alors ramené au programme suivant :

$$\min_{x \in K} d\,(F^*, F(x))$$

On peut prendre pour d différentes distances $L_1, L_2 \ldots L_\infty$. Par exemple dans le cas de L_2, on obtient le programme

$$\min_{x \in K} \|F^* - F(x)\| = \min_{x \in K} \sum_{h=1}^{p} (f_h^* - f_h(x))^2$$

Ce programme peut alors être résolu par des techniques classiques d'optimisation. C'est ce que l'on appelle le "GOAL PROGRAMMING" ou la programmation par les objectifs. Cette théorie a principalement été étudiée par IJIRI, DIEKELBACH, CHARNES et COOPER.

Dans le cas de la programmation linéaire on peut donner à ce problème une solution particulièrement élégante :

Soit

$$K : \{x \mid A\,x \leq b,\ x \geq 0\}\ , \qquad x \in R^n\ ;$$

et soient p objectifs linéaires

$$C_1 x,\ C_2 x,\ \ldots\ C_h x\ \ldots\ C_p x$$

Si l'on se fixe comme objectifs sur les p critères, respectivement

$$C_1^*,\ C_2^*,\ \ldots\ C_h^*,\ \ldots\ C_p^*\ ,$$

on peut introduire des variables Y_h et Z_h, $h = 1, \ldots p$ mesurant à la fois des écarts positifs et négatifs entre les critères $C_h x$ et les objectifs C_h^* .

Il en résulte les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lllll} C_1 x & + Y_1 & & - Z_1 & = C_1^*\ , \\ C_2 x & & + Y_2 & - Z_2 & = C_2^*\ , \\ C_p^x & & + Y_p & - Z_p & = C_p^*\ , \end{array}\right.$$

On peut alors s'efforcer de minimiser la somme de ces variables d'écarts en vue de minimiser la "distance" entre les critères et les objectifs.
On obtient alors le programme linéaire suivant :

$$\min \sum_{h=1}^{p} Y_h + Z_h$$

$$\begin{cases} C\,x + Y - Z = C^*, \\ A\,x \leqslant b\,, \\ x \geqslant C,\ Y \geqslant 0,\ Z \geqslant 0 \end{cases}$$

$C : (C_1, C_2, \ldots C_p)^*$, $C^* : (C^*_1, C^*_2, \ldots C^*_p)^*$, $Y : (Y_1, Y_2 \ldots Y_p)$, $Z : (Z_1, Z_2 \ldots Z_p)$

ce qui n'est pas autre chose qu'un programme linéaire classique.

Pour minimiser les écarts entre Cx et C^*, on peut aussi utiliser une très jolie théorie se basant sur des matrices inverses généralisées.

Observons que les traitements du type "GOAL PROGRAMMING" satisfont la nature booléenne du problème de décision, en ce sens que l'on fixe une décision appartenant à K. La coopération du décideur est requise pour la fixation des objectifs C^*_1, C^*_2, ... C^*_p sur les différents critères.

c) 3e type : Construction de relations de surclassement.

Ces méthodes s'appliquent au cas où K est fini et ont pour but de distinguer les bonnes et les mauvaises actions au moyen d'une relation de surclassement telle que "a surclasse b" si a est meilleur que b pour un nombre suffisamment important de critères tout en n'étant pas nettement inférieur à b sur les critères restants.

Considérons un problème multicritère

$$\text{Max } \{F(x) \mid x \in K\}$$

où K est fini et où $F(x) : (f_1(x), f_2(x), \ldots f_p(x))$

Soient :

$$\begin{array}{l} S_1 : \{f_1(x) \mid x \in K\} \\ S_2 : \{f_2(x) \mid x \in K\} \\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ S_p : \{f_p(x) \mid x \in K\} \end{array}$$

l'ensemble des scores réalisés par les p critères lorsque x parcourt K.

Chacun de ces ensembles est évidemment *totalement ordonné*, ainsi par exemple pour $x_1, x_2 \in K$ et si l'on considère S_1 on a toujours :

$f_1(x_1) \in S_1,\ f_1(x_2) \in S_1$ avec $f_1(x_1) > f_1(x_2),\ f_1(x_1) = f_1(x_2)$

ou $f_1(x_1) < f_1(x_2)$

Si $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ on convient de dire que x_1 est préféré à x_2 pour ce qui concerne le 1e critère. Cette préférence est évidemment transitive puisque l'ordre ainsi défini est un *ordre complet.*

A chacun des ensembles $S_1, S_2, \ldots S_p$ est associé un ordre complet. On dispose donc de p ordres complets.

Considérons maintenant le produit cartésien

$$S_1 \otimes S_2 \otimes \ldots S_p$$

Ce produit n'est bien entendu que *partiellement ordonné* par le produit des p ordres complets. Cet ordre partiel sera appelé *ordre de dominance.* Cet ordre de dominance est en général très pauvre.

Dans les méthodes du 2e type on *substitue* à cet ordre de dominance un ordre beaucoup plus riche, qui d'ailleurs est un ordre complet et qui est associé à une fonction d'utilité ou à un critère unique.

Le problème est de savoir s'il est réaliste de supposer l'existence d'un tel ordre complet, c'est-à-dire de construire une fonction d'utilité *ou bien* de donner au décideur non pas la solution optimale au sens d'un ordre complet mais de bonnes solutions et de définir les rapports qui existent entre elles. Pour y parvenir, on peut construire une relation de surclassement du type

$$x_1 \ S \ x_2$$

ce qui signifie que x_1 surclasse x_2. Cette relation est plus riche que l'ordre de dominance mais n'est en général pas un ordre complet.
Ainsi par exemple la relation S n'est pas nécessairement transitive : en effet les expressions $x_1 \ S \ x_2$ et $x_2 \ S \ x_3$
n'impliquent pas nécessairement que $x_1 \ S \ x_3$ car x_1 et x_3 peuvent être incomparables. C'est d'autant plus vrai que les relations de surclassement ne sont en général pas le reflet de toutes les préférences du décideur mais seulement de celles qui peuvent être quantifiées.

Différentes méthodes ont été proposées pour construire de telles relations. Citons notamment les méthodes ELECTRE I et ELECTRE II mises au point par B. ROY et ses collaborateurs
Ces méthodes sont simples et fréquemment utilisées. Nous nous bornerons ici à esquisser la méthode ELECTRE I et à l'illustrer sur un exemple.

La méthode ELECTRE I.

1. Les actions de K sont supposées en nombre fini, chaque action de K sera considérée comme étant le sommet d'un graphe.

2. Pour tout couple d'actions $(x_r\ x_s)$ de K on construit alors les ensembles suivants :

$$N^+(x_r\ x_s) = \{1 \mid f_1(x_r) > f_1(x_s)\}$$
$$N^-(x_r\ x_s) = \{1 \mid f_1(x_r) < f_1(x_s)\}$$

N^+ est donc l'ensemble des indices des critères pour lesquels x_r est préféré à x_s et N^- ceux pour lesquels x_s est préféré à x_r.

3. Supposons que le décideur ait affecté un poids à chacun des critères, poids qui est d'autant plus grand que l'importance du critère est forte et soient

$$q_1\ q_2\ \ldots\ q_i;\ \ldots\ q_p \qquad \text{ces poids.}$$

Si le décideur ne souhaite pas différencier les critères par ces poids, il suffit de poser $q_i = 1, \forall\ i$.
On détermine alors les quantités suivantes :

$$P^+\ (x_r\ x_s) = \sum_{i \in N^+(x_r x_s)} q_i$$

$$P^-\ (x_r\ x_s) = \sum_{i \in N^-(x_r x_s)} q_i$$

4. Si P^+ est suffisamment grand en regard de P^-, il est clair intuitivement que x_r surclasse x_s. Pour établir la relation de surclassement, on peut adopter la règle suivante : le décideur fixe un seuil de concordance λ, $(\lambda > 1)$ et si la condition suivante, dite *condition de concordance*, est remplie :

$$\frac{P^+(x_r\ x_s)}{P^-(x_r\ x_s)} > \lambda\ , \quad \text{alors } x_r\ S\ x_s\ .$$

Dans le cas inverse, x_r et x_s restent incomparables.
Les bonnes valeurs du seuil de concordance sont déterminées par l'expérience pratique. Elles dépendent évidemment des poids q_i.

5. Dans certains cas, si les actions x_r et x_s sont fortement différentiées dans un sens par certains critères et au sens inverse par d'autres, on peut renoncer à exprimer que x_r surclasse x_s ; c'est ce que l'on appelle la condition de discordance.

6. La relation de surclassement est alors représentée par un graphe G, appelé graphe de surclassement dont les sommets sont les actions de K et tel que l'arc $x_r x_s$ existe si $x_r \; S \; x_s$.

7. On construit alors le noyau du graphe ainsi obtenu.
   Le noyau est un ensemble de sommets tels que
   - aucun sommet du noyau ne soit surclassé par un autre sommet du noyau;
   - tout sommet hors du noyau soit surclassé par au moins un sommet du noyau.

8. Compte tenu de sa définition, le noyau contient de "bonnes actions" au sens de la relation de surclassement. C'est parmi ces actions que le décideur sera invité à faire son choix.

Remarques :

a. Le noyau existe et est unique si le graphe est sans circuit. Pour cela on peut d'abord réduire le graphe c'est-à-dire remplacer chaque circuit par un seul sommet.
   Malheureusement, cette opération supprime une bonne partie de l'information contenue dans la relation de surclassement.

b. Plutôt que de réduire le graphe, on peut construire un de ses quasi-noyaux.
   C'est un ensemble de sommets tels que :
   - aucun sommet du quasi-noyau ne soit surclassé par un autre sommet du quasi-noyau;
   - tout sommet hors du quasi-noyau soit surclassé par au moins un sommet du quasi-noyau ou par un sommet surclassé par un sommet du quasi-noyau.

   L'avantage de cette procédure est qu'il existe toujours au moins un quasi-noyau.
   L'utilisation de quasi-noyaux est due aux travaux de P. HANSEN, Ph. VINCKE et M. ANCIAUX-MUNDELEER [8].

Exemple :

Nous reprenons ici un exemple particulièrement didactique proposé par B. ROY

Soit un père de famille confronté avec l'achat d'une nouvelle voiture. Sept voitures proposées sur le marché entrent en ligne de compte. Les critères pris en considération sont successivement : le prix, le confort, la vitesse, la ligne.

Le tableau 1 donne l'importance des critères et l'échelle de valeurs considérées

	Critère	Importance	Echelle
1	Prix	$p_1 = 5$	300, 250, 200, 150; 100
2	Confort	$p_2 = 4$	Faible, Moyen, Excellent
3	Vitesse	$p_3 = 3$	Moyenne, Rapide
4	Ligne	$p_4 = 3$	Ordinaire, Soignée

Tableau I

Le prix est donc le critère le plus important, le confort est très important, la vitesse et la ligne sont moins importantes.

Le tableau II contient les données relatives aux sept voitures

Voitures	1	2	3	4	5	6	7
Critère 1	300	250	250	200	200	200	100
Critère 2	E	E	M	M	M	F	F
Critère 3	R	M	R	R	M	R	M
Critère 4	S	S	S	O	S	S	O

Tableau II

Le tableau III donne les ensembles N^+ et N^- pour tous les couples de voitures

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	$N^+=\{3\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{2\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{2,4\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{2,3\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{2\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{2,3,4\}$ $N^-=\{1\}$
2		-	$N^+=\{2\}$ $N^-=\{3\}$	$N^+=\{2,4\}$ $N^-=\{1,3\}$	$N^+=\{2\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{2\}$ $N^-=\{1,3\}$	$N^+=\{2,4\}$ $N^-=\{1\}$
3			-	$N^+=\{4\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{3\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{2\}$ $N^-=\{1\}$	$N^+=\{2,3,4\}$ $N^-=\{1\}$
4				-	$N^+=\{3\}$ $N^-=\{4\}$	$N^+=\{2\}$ $N^-=\{4\}$	$N^+=\{2,3\}$ $N^-=\{1\}$
5					-	$N^+=\{2\}$ $N^-=\{3\}$	$N^+=\{2,4\}$ $N^-=\{1\}$
6						-	$N^+=\{3,4\}$ $N^-=\{1\}$
7							-

Tableau III

Le tableau III est symétrique par rapport à la diagonale principale à condition de permuter N^+ et N^-.

Le tableau IV donne les rapports $P^+/_{P-}$ pour tous les couples de voitures.
Ces rapports ne sont guère notés s'ils sont inférieurs à 1.

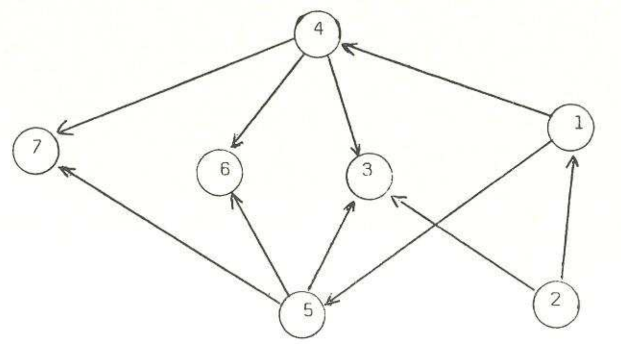
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	-	1,40	1,40	-	2,00
2	1,67	-	1,33	-	-	-	1,40
3	1,25	-	-	-	-	-	2,00
4	-	1,14	1,67	-	-	1,33	1,40
5	-	1,25	1,67	-	-	1,33	1,40
6	1,25	2,00	1,25	-	-	-	1,20
7	-	-	-	-	-	-	-

Tableau IV - Rapports $P^+/_{P^-}$

Il est tenu compte d'une condition de discordance.
Au cas où le tableau de concordance indique que x_r surclasse x_s, le décideur renonce à tracer sur le graphe l'arc (x_r, x_s) si à x_r et x_s sont respectivement associés les prix ou conforts suivants :

	Prix			Confort
x_r	300	300	250	F
x_s	100	130	100	E

En effet, dans ce cas x_s est nettement meilleur que x_r pour au moins un critère (prix ou confort) ce qui est en discordance avec le fait que x_r surclasse x_s.
Dans le cas de l'exemple, il n'y a pas de discordance sur la vitesse et la ligne.
Dans le cas où les critères sont mesurés par des échelles numériques, on peut exprimer la discordance au moyen d'un indice, en fixant un seuil à ne pas dépasser par les différences des valeurs des actions suivant chaque critère.
En prenant $\lambda = 4/3$ on obtient le graphe de surclassement suivant :



Graphe de surclassement

Il est aisé de voir que le noyau de ce graphe se compose des sommets 2,4,5. Ce sera donc parmi les voitures 2, 4 et 5 que le décideur, en l'occurrence le bon père de famille, sera invité à faire son choix.

d) 4e type : Recherche interactive d'un meilleur compromis.

Ce 4e type de méthode est sûrement le plus créatif sur le plan des principes en Analyse multicritère.

Il ne s'agit pas d'une simple hiérarchisation des critères, ni de la construction d'une fonction d'utilité ou d'une pondération des fonctions économiques. Il s'agit d'un processus séquentiel, au cours duquel se poursuit un dialogue décideur-homme d'étude en vue d'établir une solution de meilleur compromis.

Ces méthodes reposent sur le fait que le décideur ne connaît pas au départ les poids qu'il faut accorder aux différents critères.
Il n'a aucune idée à priori sur l'importance relative des objectifs.
Au contraire le décideur va prendre conscience progressivement des limitations que le modèle impose aux objectifs. Il va ainsi au fur et à mesure de l'avancement du processus séquentiel donner les objectifs sur lesquels il est prêt à faire des concessions et les objectifs qu'il souhaite améliorer. Ainsi il pourra finalement en collaboration avec l'homme d'étude construire une solution de meilleur compromis.

Dans cet esprit, différents algorithmes ont été proposés. Citons notamment ceux de BOYD , GEOFFRION , BENAYOUN et TERGNY (Méthode STEM - Méthode POP) AUBIN et NASLUMD , ZIONTS et WALLENIUS , ROY VINCKE ...

Ils concernent tous la résolution de programmes linéaires à plusieurs fonctions économiques. Nous ne les exposerons pas tous ici.
A titre d'exemple, nous développerons la méthode de BENAYOUN et TERGNY.
Nous préciserons ensuite ce qui distingue les méthodes de ROY et VINCKE des autres méthodes.

1) Méthode de BENAYOUN et TERGNY

Soit le programme linéaire suivant :

$$\max \{c_1x,\ c_2x\ \dots\ c_px \mid Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

La solution de meilleur comprimis est atteinte après un certain nombre de cycles. Chaque cycle se compose d'une phase de calcul et d'une phase de décision. Au cours de la phase de calcul, seul l'homme d'étude intervient; au cours de la phase de décision, le décideur doit intervenir.
Au fur et à mesure de l'avancement des cycles, le décideur, qui n'avait pas d'idée à priori sur l'importance des objectifs, devient capable de donner des précisions.

1. Initialisation : Construction d'une matrice de gain et de la solution idéale.

On considère d'abord les p programmes linéaires unicritères suivants :

$$\text{lax } \{C_hx \mid x \in K\} \quad h = 1,2,\dots p.$$

où $K : \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x \in R^n$.

Il en résulte p solutions optimales, soient :

$$\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \dots\ \tilde{x}_h,\ \dots\ \tilde{x}_p\ ;$$

et les valeurs correspondantes de leurs fonctions économiques

$$M_1=C_1\tilde{x}_1,\ M_2=C_2\tilde{x}_2,\ \dots\ M_h=C_h\tilde{x}_h\ \dots\ M_p=C_p\tilde{x}_p\ .$$

On peut alors construire un *tableau de gain* dans lequel figurent les valeurs prises par les différentes fonctions économiques pour les différentes solutions optimales $\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2\ \dots\ \tilde{x}_p$.

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	......	$\tilde{x}_h$	......	$\tilde{x}_p$
C_1x	M_1	$C_1\tilde{x}_2$	....	$C_1\tilde{x}_n$	.....	$C_1\tilde{x}_p$
C_2x	$C_2\tilde{x}_1$	M_2	....	$C_2\tilde{x}_h$	.....	$C_2\tilde{x}_p$
⋮	....	....	....	....	....	......
C_hx	$C_h\tilde{x}_1$	$C_h\tilde{x}_2$	....	M_h	.....	$C_h\tilde{x}_p$
⋮	....	....	....	....	....	......
C_px	$C_p\tilde{x}_1$	$C_p\tilde{x}_2$	....	$C_p\tilde{x}_h$		M_p

Il est clair que dans l'espace des fonctions économiques le point

$$M^*(M_1,\ M_2,\ \dots\ M_h,\ \dots\ M_p)$$

représente le point idéal à atteindre car ce point rend chaque fonction optimale sur K. Cette solution est la *solution idéale* à atteindre. Elle est atteinte si dans une colonne du tableau de gain on trouve successivement les valeurs $(M_1\ M_2\ \dots\ M_p)$. Dans ce cas, s'il s'agit de la colonne $\tilde{x}_h$, la solution $\tilde{x}_h$ est la solution du problème puisque $\tilde{x}_h$ maximise toutes les fonctions économiques.

En général, cette solution n'est pas atteinte. On va alors rechercher la solution de meilleur compromis en s'efforçant de trouver un point x de K qui donne dans l'espace des fonctions économiques un point aussi proche que possible de M^*.

2. *Phase de calcul :*

Dans cette phase on va rechercher une solution $x \in K$ qui est la plus proche, dans un sens minimax du terme, de la solution idéale. Pour ce faire on résout le programme linéaire suivant :

$$\text{PL}(1) \qquad \min \lambda \quad \begin{cases} (M_h - C_h x)\,\Pi_h \leq \lambda\ , & h = 1,\ 2,\ \dots\ p \\ x \in K\ , \quad \lambda \geq 0\ ; \end{cases}$$

Les coefficients Π_h sont destinés à tenir compte de la variabilité du h^e critère et permettent de normeur leur influence.

BENAYOUN et TERGNY ont proposé les coefficients suivants :

$$\Pi_h = \frac{\alpha_h}{\sum\limits_{h=1}^{p} \alpha_h} \text{ avec } \alpha_h = \frac{M_h - m_h}{M_h} \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} (C_{hj})^2}}$$

où M_h et m_h sont respectivement le maximum et le minimum de la h^e ligne du tableau de gain et où les coefficients C_{hj} sont les coefficients de la fonction économique $C_h x$. On suppose M_h et m_h positifs.

Il est clair que si M_h et m_h sont voisins, Π_h peut être petit car la variabilité du h^e critère est faible.

Il est clair aussi que d'autres types de coefficients pourraient facilement être proposés.

Le programme linéaire PL(1) admet une solution considérée comme un premier compromis. Soit $\bar{x}_1$ cette solution. Celle-ci est alors proposée au décideur, ainsi que les valeurs prises par les différentes fonctions économiques en $\bar{x}_1$:

$$\bar{x}_1 \; (C_1\bar{x}_1, C_2\bar{x}_1, \ldots C_h\bar{x}_1, \ldots C_p\bar{x}_1)$$

3. Phase de décision :

Le décideur prend connaissance de la solution de compromis $\bar{x}_1$ et des niveaux obtenus par les différentes fonctions économiques.
Il compare ces niveaux avec ceux de la solution idéale

$$M^* \; (M_1, M_2, \ldots M_h, \ldots M_p)$$

Cette comparaison étant faite, 2 cas sont possibles :

(i) le décideur s'estime satisfait par les niveaux obtenus par $\bar{x}_1$ et dès lors cette solution de compromis devient la solution définitive.

(ii) le décideur s'estime satisfait pour certains niveaux obtenus par $\bar{x}_1$ mais il souhaite améliorer les autres.
Dans ce cas, on recherche une nouvelle solution de compromis en procédant de la façon suivante :
le décideur indique d'abord un critère sur lequel il consent une certaine perte afin de pouvoir améliorer la valeur des autres critères. On lui demande également la valeur de la perte qu'il consent.
Soit g le critère sur lequel le décideur consent une perte et soit Δg le montant de la concession qu'il tolère.

On définit alors un nouveau domaine de solutions réalisables.
Soit K_2 ce domaine.

$$K_2 \begin{cases} K : \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0 . \\ C_g x \geq C_g \bar{x}_1 - \Delta_g \\ C_h x \geq C_h \bar{x}_1 \quad h = 1,2 \ldots p, h \neq g. \end{cases}$$

Le domaine K_2 est donc un sous-ensemble du domaine K précédent. On exprime que le g^e critère peut être diminué de Δ_g, mais que les autres critères doivent au moins atteindre le niveau obtenu par $\bar{x}_1$.
On retourne alors à la *phase de calcul* en recherchant la meilleure solution de compromis sur K_2.
A cet effet on résout le programme suivant :

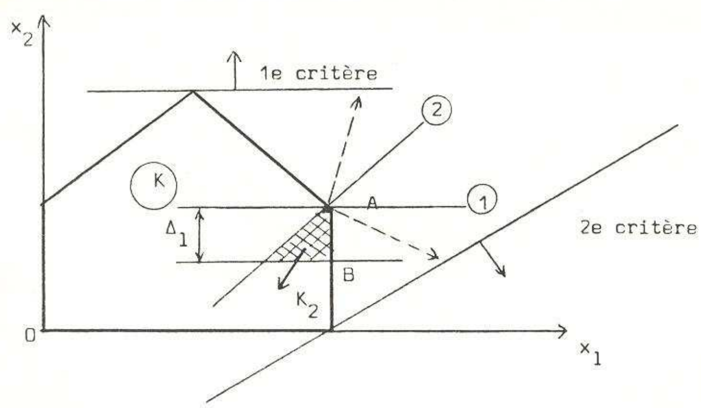
$$\min \lambda$$

$$\begin{cases} [M_h - C_h x] \, \Pi_h \leq \lambda \qquad h = 1,2 \ldots p \\ \lambda_g = 0 \\ x \in K_2, \lambda \geq 0 \end{cases}$$

dont la solution est une nouvelle solution de compromis $\bar{x}_2$ soumise au décideur, qui reprend alors une nouvelle phase de décision.
Le problème se termine au plus en p cycles car à chaque cycle (phase de calcul-phase de décision) le critère faisant l'objet d'une concession est éliminé ($\Pi_g = 0$)

Illustration sur un exemple dans R^2.

Considérons un problème à 2 critères, se terminant en 2 cycles.



A est la 1e solution de compromis. Elle résulte du 1e cycle. Le décideur est satisfait par le niveau obtenu par le 1e critère, mais le 2e critère lui paraît insuffisant. Il consent une perte Δ_1 sur le 1e critère. D'où un 2e cycle qui conduit en B.
Le décideur s'estime satisfait par les niveaux obtenus par B, c'est la solution de compromis. Observons que B est obtenu en optimisant la phase de calcul sur K_2.

Analyse de la méthode.

α) La méthode permet d'entretenir un dialogue décideur-homme d'étude. Le décideur intervient à chaque phase de décision, il prend conscience de la divergence de ses objectifs de façon quantifiée. Il apprécie les progrès de la solution de compromis, il peut intervenir pour indiquer où l'on peut faire des concessions et ce qu'il faut améliorer. Observons qu'il lui est impossible d'imaginer ces concessions à priori car il ne connaît pas les composantes de la solution de compromis.

β) On peut compléter l'étude en fournissant au décideur à chaque phase de calcul un tableau de la valeur de tous les taux de substitution marginaux. En considérant toutes les paires d'objectifs on peut donner l'accroissement maximum de l'un lorsque l'on tolère une diminution de une unité de l'autre. C'est une analyse de sensibilité du type shadow-costs-shadow-prices, en programmation linéaire.

γ) La méthode ne faisant appel qu'à des techniques de programmation linéaire il est facile de construire un organigramme pour la méthode et d'écrire un code correspondant. La méthode peut fonctionner même pour de grands programmes. Les limitations sont celles de la programmation linéaire.

δ) On peut reprocher à la méthode d'éliminer à chaque étape un critère du problème. Cela permet de terminer la procédure en au plus p étapes mais, par contre, cela empêche toute correction, tout retour en arrière de la part du décideur : il ne lui est plus possible d'augmenter un critère sur lequel il estime à posteriori avoir fait une concession trop importante. Cette remarque relève d'un problème plus général que nous allons traiter ci-dessous.

2°) Le problème de la convergence dans les procédures interactives.

On peut constater, lorsqu'on analyse les différentes méthodes interactives qui ont été présentées jusqu'ici en programmation linéaire à plusieurs fonctions économiques, qu'elles présentent essentiellement les inconvénients

- de limiter les compromis proposés à l'ensemble fini des sommets du polyèdre;
- de réduire le domaine admissible progressivement empêchant ainsi le retour en arrière,
- de poser au décideur des questions auxquelles il n'est pas capable de répondre.

Pourquoi toutes ces restrictions ? Quelle est l'origine de ces inconvénients ?
L'origine commune de tous ces inconvénients est le souci des auteurs de construire des méthodes "convergentes";

- convergentes au sens d'une fonction d'utilité que l'on suppose exister (de manière implicite ou non) et avec laquelle les réponses du décideur sont supposées cohérentes;
- convergentes vers une "meilleure solution" qui existerait à priori, qui serait inconnue du décideur mais vers laquelle il tendrait implicitement au cours de la procédure.

Nous pensons qu'une méthode interactive a essentiellement pour but d'*aider* le décideur à trouver un compromis satisfaisant, compromis qu'il n'aurait peut-être pas accepté avant le début du dialogue mais qui, à un certain moment, lui paraît satisfaisant étant donné l'information qu'il a accumulée au cours du dialogue.
Il n'existe donc pas, à notre avis, de solution a priori vers laquelle le décideur tend et celui-ci peut très bien vouloir revenir sur une décision antérieure, chose impossible dans la plupart des méthodes existantes.

Les méthodes de ROY et VINCKE , par contre, permettent ces retours en arrière, elles permettent également au décideur de modifier certaines contraintes en cours de procédure, (l'ensemble des actions est donc évolutif) ce qui peut très bien se concevoir puisqu'en pratique il n'existe pas de frontière absolue et fixée une fois pour toutes entre les actions admissibles et les autres

Il n'est évidemment pas possible de parler de convergence de ces méthodes (au point de vue mathématique).

Nous pensons qu'en fait c'est le décideur qui arrêtera la procédure lorsqu'il aura trouvé le compromis proposé satisfaisant vu les informations accumulées. Ces informations lui permettent de mieux percevoir ce qu'il est en droit d'attendre et ce qu'il doit concéder pour arriver à un compromis.

Et, avec l'accumulation de l'information, il arrivera fatalement un moment où le décideur, soit décidera qu'il n'y a pas de solution satisfaisante, soit choisira un compromis (qu'il n'aurait peut-être pas choisi à une étape antérieure), mais qu'il accepte finalement, ne fût-ce que parce qu'il est soumis à des impératifs de temps.

4. *Voies de recherche - Tendances actuelles.*

En ce qui concerne la méthodologie, B. ROY et ses collaborateurs sont en train de jeter les bases d'une théorie beaucoup plus approfondie des problèmes multicritères : au moyen desnotions de dimension, critère,quasi-critère, pseudo-critère, critère mesurable, critère graduable, ils modélisent peu à peu des notions que le décideur ressent de manière intuitive et qui auparavant n'étaient pas envisagées vu leur caractère très flou.
En ce qui concerne la pratique, les méthodes interactives intéressent actuellement un public de plus en plus important et des applications concrètes commencent à être traitées par ces méthodes, notamment en Belgique.

Bibliographie

Généralités.

ARROW, K., "Utilities, Attitudes, Choices", *Econometrica 26*, p.1.

BERNARD et BESSON, "Douze méthodes d'analyse multicritère", *R.I.R.O.* n°V-3, Octobre 1971.

ROY, B., "Vers une méthodologie générale d'aide à la décision", *METRA*, Direction scientifique, rapport de synthèse n°87, juin 1975. Présenté à la conférence "Multiple criteria decision-making", tenue à Jouy-en-Josas du 21 au 23 mai 1975.

ROY, B., "Decision avec critères multiples : problèmes et méthodes", revue *METRA*, Vol. XI, n°1, 1972.

Méthodes interactives et programmation à plusieurs fonctions économiques.

AUBIN, J.P., NASLUND, B., "An Exterior Branching Algorithm ", *European Institute for Advanced Studies in Management*, Working paper 72-42, November 1972.

BENAYOUN, R., de MONTGOLFIER, J., TERGNY, J., LARITCHEV, O., "Linear programming with multiple objective function : step method (STEM)", *Mathematical Programming 1*, n°3, 1971.

GEOFFRION, A.M., "Proper Efficiency and the theory of vector maximization", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22, 1968.

GEOFFRION, A.M., DYER, J.S., FEINBERG, "An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department", *Management Science*, Vol 19, n°4, 1972.

PHILIP, J., "Algorithms for the vector maximization problem", *Mathematical Programming*, Vol 2, n°2, 1972.

VINCKE, Ph., "Une méthode interactive en programmation linéaire à plusieurs fonctions économiques". A paraître dans la *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle* (Série Verte).

ZELENY, M., "Linear Multiobjective Programming", Springer Verlag, 95, 1974.

ZIONTS, S., WALLENIUS, J., "An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem", *European Institute for Advanced Studies in Management*, Working paper 74-10, March, 1974.

Relations de Surclassement.

BUFFET, GREMY, MARC et SUSSMANN, "Peut-on choisir en tenant compte de critères multiples ? Une méthode (ELECTRE) et trois applications", *METRA* 6, n°2, 1967.

HANSEN, P., ANCIAUX-MUNDELEER, M., VINCKE, Ph., "Quasi-kernels of Outranking Relations"; présenté à la conférence "Multiple criteria decision-making" tenue à Jouy-en-Josas du 21 au 23 mai 1975.

JACQUET-LAGREZE, E., "How we can use the notion of Semiorders to build Outranking Relations in Multicriteria Decision Making", *METRA*, Vol 13, n°1, 1974.

ROY, B., "La méthode ELECTRE II", *METRA*, Direction Scientifique, note de travail n°142, 1971.

ROY, B., "Classement et choix en présence de points de vue multiples" (la méthode ELECTRE)" *R.I.R.O.*, 2e année, n°8, 1968.

Théorie des fonctions de valeur et des fonctions d'utilité.

DEBREU, G., *Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function*, Decision Processes, J. Wiley, N.Y., 1954.

DEBREU, G., *Topological Methods in Cardinal Utility Theory*, ARROW, KARLIN and SUPPES (Eds.), Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford University Press, Stanford, California, 1960.

FISHBURN, P.C., *Utility Theory for Decision-Making*, Wiley and Sons, N.Y., 1970.

FISHBURN, P.C., *Decision and Value Theory*, Wiley and Sons, 1964.

FISHBURN, P.C., "Utility Theory", *Management Science*, Vol 14, n°5, Janvier 1968.

LUCE, R.D., "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, Vol 24, 1956.