

**POGING TOT ONTWIKKELING, TEN BEHOEVE
VAN BEDRIJFSPRACTICI, VAN THEORETISCH GEFUNDEERDE
DOCH EENVOUDIG HANTEERBARE BESLUITREGELS
VOOR DE RAMINGEN VAN DE MINIMUM RENTABILITEITS-
DREMPELS BIJ ORGANISATIEVERBETERINGEN**

door H. MULLER

Rijksuniversiteit Gent

Inleiding.

Het is aan de relatief jonge mathematische besliskunde te danken dat vele, vroeger empirisch benaderde beheersproblemen nu door wiskundige methoden kunnen worden aangepakt.

Deze recente trend tot mathematisatie van de beheersdiscipline is ongetwijfeld een lofwaardige poging en een streving naar meer wetenschappelijkheid in het bedrijfsbeheer; spijtig genoeg heeft deze theorie — afgezien van de weinig talrijke en steeds maar weer als voorbeeld aangehaalde spectaculaire realisaties — zich weinig weten door te zetten op het dagelijkse toepassingsvlak der industriële organisatieactiviteiten.

De niet te onderschatten emotionele beweegredenen buiten beschouwing gelaten, mag — naar ons inzien — de vrees der beheersfunctionarissen voor eventuele disproportionaliteit tussen de te verwachten studiekosten en de onbekende te realiseren besparingen als hoofdrede aangehaald worden voor het niet toepassen der wiskundige beleidstechnieken bij de benadering van beperkte tactische beheersproblemen.

Deze vrees voor disproportionaliteit tussen kosten en baten is vooral te wijten aan het ontbreken van een wiskundig gefundeerde maar door practici eenvoudig te begrijpen en op elk niveau hanteerbare handige benadering van de minimum rentabiliteitsdrempel die de voorgenomen organisatieverbeteringen zou verantwoorden. Een a prioristische besparingsappreciatie is nu eenmaal onontbeerlijk ter justificatie van elk organisatiestudie evenals bij de keuze van de te werk te stellen analysemiddelen.

De bedoeling van deze korte bijdrage is, bij wijze van voorbeelden met betrekking tot de theorie der wachtlijnen, een benadering te formuleren

die ons in staat stelt op snelle, handige en toch veilige wijze de potentieel bereikbare besparing te ramen.

Ontwikkeling van een besluitregel.

De studies van A.K. Erlang (1917), A. Kolmogorov (1931), R. Kronig (1943), D.G. Kendall (1951) — wij citeren enkel de meest toonaangevende — vestigden de wiskundig-statistische grondslag voor een theorie der wachtlijnen, die door Philip M. Morse (*) en later door A. Kaufmann & R. Cruon (**) voor de organisatie verder ontwikkeld en bijgewerkt werden. Beoelde technieken, hoewel toegankelijk voor ingewijden in het operationeel onderzoek, blijven echter van weinig nut voor bedrijfspractici.

Beschouwen we bv. de wachtlijnsituatie bij M parallele dienstposten, gevoed volgens een Poisson distributie door een universum met oneindige populatie, via één enkele wachtlijn met absolute discipline « eerstkomend, eerst bediend ». De servicetijd wordt tot een negatief exponentiële verdelingswet beperkt zodat de wachtlijnlengte mag worden omschreven door

$$L_q^M = \frac{g^{M+1}}{M \times M! (1 - g/M)^2} \times \frac{1}{\frac{g^M}{M! (1 - g/M)} + \sum_{n=0}^{M-1} \frac{g^n}{n!}}$$

mits $g = \frac{\text{gemiddelde bedieningstijd}}{\text{gemiddelde tijd tussen twee aankomsten}}$

of trafiekintensiteit en $\frac{g}{M} < 1$

Deze relatief omslachtig te berekenen formule onderstelt de juiste kennis van de trafiekintensiteit (g) en elke raming van de besparing welke zou voortvloeien uit de invoering van een bijkomende $(M + 1)^e$ dienstpost vereist een nagenoeg integrale oplossing van het gestelde wachtlijnprobleem. Het gebruik der Tabellen van L.G. Peck en R.N. Hazelwood (***) (mits $N = 250$ te stellen ter benadering van de populatie met oneindig universum) kan weliswaar het zuiver rekentechnisch gedeelte vereenvoudigen, maar zet steeds de kennis van de trafiekintensiteit (g) voorop.

(*) « Queues, Inventions & Maintenance » ORSA-publication n° 1

(**) « Les phénomènes d'attente » Dunod 1961

(***) « Finite Queuing Tables » ORSA-publication n° 2.

Moest men er daarentegen in slagen de procentuele wachtkostenbesparingen

$$\text{PWB}(M, g) = \frac{L_q^M - L_q^{M+1}}{L_q^M}$$

tengevolge van het invoeren van één supplementaire parallelle dienstpost t.o.v. de effectief bestaande toestand, langs de veilige kant benaderd te kunnen formuleren, onverschillig de waarde van de veranderlijke g of trafiekintensiteit, dan zou meteen een belangrijke stap zijn gezet in de richting van de veilige approximatie der potentiële wachtkostenbesparingen $\text{APWB}(M)$ mits

$$\text{APWB}(M) = \min_{0 \leq g \leq M} \text{PWB}(M, g)$$

De overblijvende veranderlijke M stelt inderdaad op zichzelf geen kwantificatiemoeilijkheid en mag steeds als een bekend gegeven worden vooropgezet.

In het licht der met deze bijdrage nagestreefde doelstelling zijnde het formuleren van eenvoudige besluitregels voor de bedrijfspracticus, die essentieel in zijn dagelijkse leidingfunctie met tactische problemen geconfronteerd wordt, mogen we ons zonder al te groot gevaar voor gebrek aan realiteitszin, beperken tot het interval van 1 tot 5 parallelle dienstposten ($1 \leq M \leq 5$).

Een te groot aantal parallelle dienstposten geeft inderdaad organisatorisch meestal aanleiding tot verscheidene parallelle wachtlijnen, hetgeen ons in de overgrote meerderheid der gevallen terug in het bovengeciteerde interval van 1 tot 5 servicestations brengt.

De wiskundige analyse van de procentuele wachtkostenbesparing voor de situatie $M = 1$ zullen we hieronder ten titel van voorbeeld in detail uitwerken.

Uitgaande van de algemene formulering

$$\text{PWB}(M, g) = \frac{L_q^M - L_q^{M+1}}{L_q^M} = 1 - \frac{1}{X(M, g)}$$

met

$$X(M, g) = \frac{L_q^M}{L_q^{M+1}} = \frac{M(M+1-g)}{g(M-g)} \times \frac{(M+1) \sum_{n=0}^{M-1} \frac{g^n}{n!} - \sum_{n=0}^M \frac{g^{n+1}}{n!}}{M \sum_{n=0}^M \frac{g^n}{n!} - \sum_{n=0}^{M-1} \frac{g^{n+1}}{n!}}$$

vinden we meer specifieke voor de factor X ($M = 1, g$) of

$$X(1, g) = \frac{(2-g)(2+g)}{g(1-g)} = \frac{1}{1-A} \quad (A \equiv \text{PWB}(1, g))$$

evenals de ermede corresponderende eerste afgeleide naar de trafiekintensiteit g

$$X'(1, g) = \frac{-g^2 + 8g - 4}{g^2(1-g)^2}$$

In het geldigheidsdomein van $0 \leq g \leq 1$ vinden we

$$X' = - \quad \text{voor } g = 0$$

$$X' = + \quad \text{voor } g = 1$$

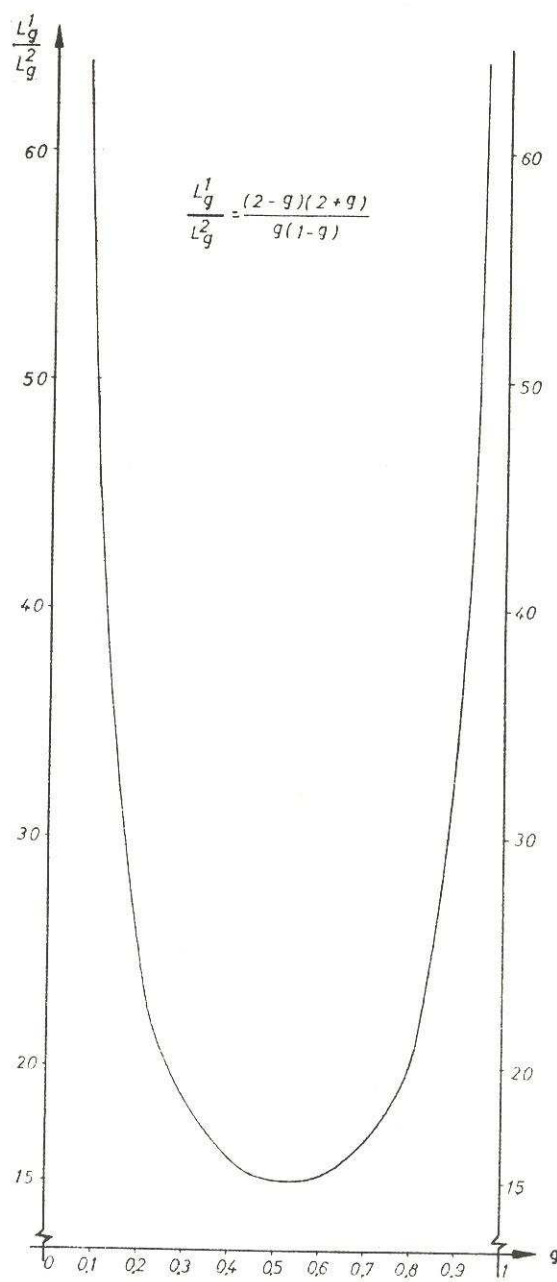
$$X' = 0 \quad \text{voor } g = \frac{-8 + \sqrt{64 - 16}}{-2} \cong 0,53$$

hetgeen wijst op een U-vormige naar bovengerichte convexe curve met minimumwaarde X ($M = 1; g$) $\cong 14,9$ voor $g \cong 0,53$.

Uit de grafische weergave van figuur 1 zijn verdere numerische waarden der functie $X(1, g) = L_0^1/L_0^2$ af te leiden, terwijl figuur 2 de waarde $\text{PWB}(1, g) = 1 - [1/X(1, g)] = A$ weergeeft.

Belangrijk is dat als algemeen geldende gevolgtrekking naar voortreedt dat bij overgang van een naar twee parallelle servicestations de gemiddelde lengte van de oorspronkelijke wachttlijn minimaal tot $1/15$ herleid wordt, ongeacht de intensiteit van de trafiek. Omgezet in relatieve tijdsbesparing $\text{APWB}(M=1)$ betekent bovenaangeduide omschakeling een minimale winst van 93 % van de oorspronkelijke wachttijden.

Het behoort nu aan de bedrijfspracticus te oordelen of de minimale potentiële tijdswinst van 93 % voldoende aantrekkelijk is om een meer uitvoerige studie van het probleem te rechtvaardigen. Bedoelde studie zou er desgevallend in bestaan de specifieke trafiekintensiteit g vast te leggen en tevens na te gaan in hoeverre de uitgangshypothesen (oneindig universum, Poisson-aankomstenverdeling, exponentiële bedieningstijddistributie, strikte wachttlijndiscipline, en dergelijke) effectief vervuld zijn. Aan de hand van figuur 2, en de trafiekintensiteit gekend zijnde, kan dan de reële besparing, die zich tussen 93 % en 100 % zal situeren, bepaald worden.

Fig. 1. — Grafische weergave van $X(1, g)$.

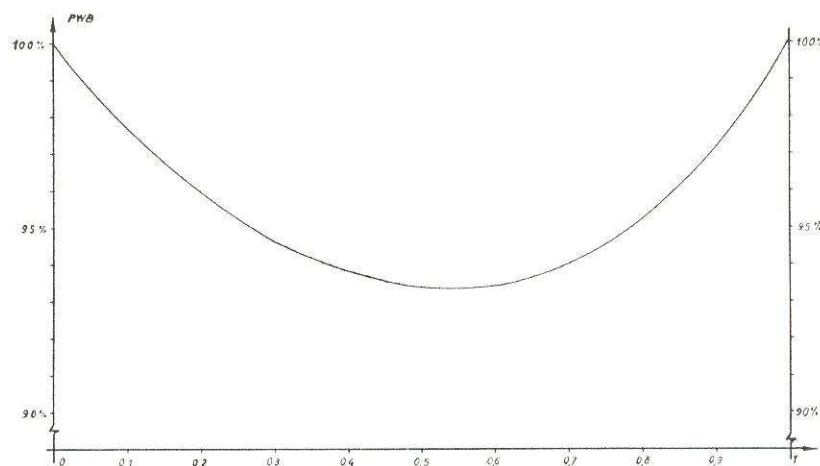


Fig. 2. — Grafische weergave van PWB (1, g).

Analoge studies voor M in het interval 2 tot 5, die dank zij de ordinator CAB 500 der Rijksuniversiteit Gent (*) op een numerische manier werden voltrokken, wijzen op een minimale wachtlijnbekorting tot nagenoeg 1/7,5 of 14 %; 1/5 of 20 %; 1/4 of 25 %; 1/3,5 of 29 % respectievelijk voor M = 2, 3, 4 en 5, hetgeen ons als effectieve minimum besparing APWB (M) in wachtlijnkosten bij uitbreiding met een parallelle dienstpost de onderstaande cijfers verzekert (cfr. fig. 3 en 4) :

M = 1	g = 0,53	APWB = 93,3 %
M = 2	g = 1,16	APWB = 86,1 %
M = 3	g = 1,84	APWB = 80,2 %
M = 4	g = 2,56	APWB = 75,5 %
M = 5	g = 3,30	APWB = 71,6 %

Steeds langs de veilige kant blijvend, kan de procentuele wachtlijnkostenbesparing bij inschakeling van één supplementaire parallelle dienstpost t.o.v. de initiële situatie met M stations, voor het vooropgezette geldigheidsgebied $1 \leq M < 6$ bondig worden geresumeerd in de door ons gesuggererde approximatieregel

$$\text{PWB (initieel M)} \geq \frac{15 - M}{15} \times 100 \%$$

(*) Laboratorium wijlen Prof. ir. A. DE WINNE.

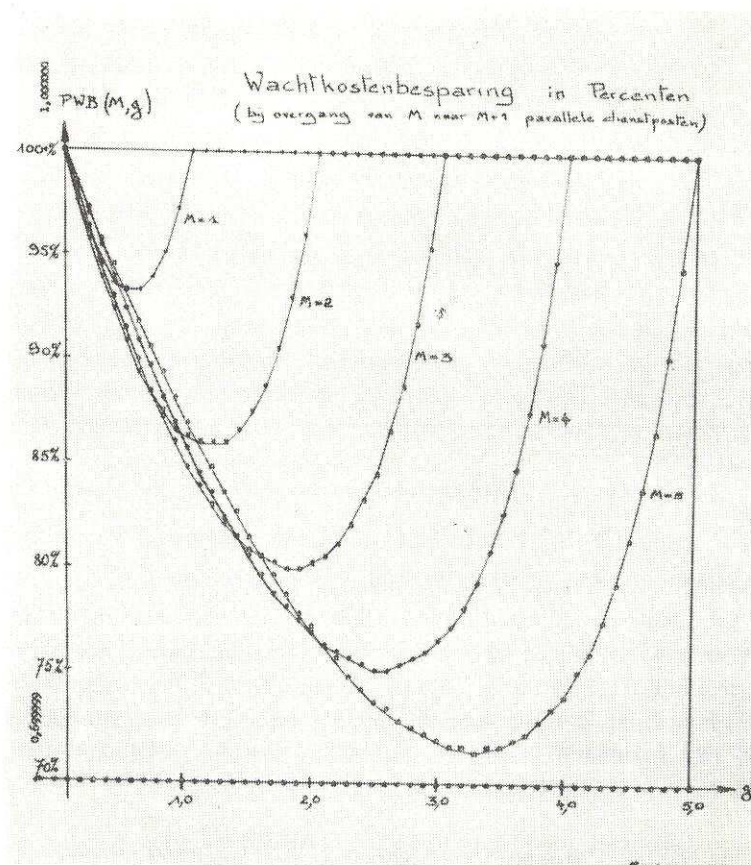


Fig. 3. — Wachtkostenbesparing in percenten, grafisch weergegeven.

Slotbeschouwing.

Het ontwikkelen van mathematisch gefundeerde, algemeen geldende besluitregels ter raming van minimale besparingen bij reorganisaties, ten behoeve van bedrijfspractici die noch over de nodige tijd noch over de vereiste specialistische scholing in OR beschikken, lijkt ons een der noodzakelijke voorwaarden tot een betere samenwerking tussen de lijngezagdragers en de interne of externe in wiskundige beleidstechnieken gespecialiseerde stafmede-

EXCERPT 1

G= 0,00	A= 1,000	B= 1,000	C= 1,000	D= 1,000	E= 1,000
G= 0,10	A= 0,977	B= 0,979	C= 0,982	D= 0,985	E= 0,986
G= 0,20	A= 0,950	B= 0,959	C= 0,964	D= 0,969	E= 0,973
G= 0,30	A= 0,916	B= 0,930	C= 0,947	D= 0,964	E= 0,989
G= 0,40	A= 0,875	B= 0,909	C= 0,930	D= 0,959	E= 0,996
G= 0,50	A= 0,828	B= 0,866	C= 0,915	D= 0,940	E= 0,993
G= 0,60	A= 0,774	B= 0,815	C= 0,866	D= 0,910	E= 0,980
G= 0,70	A= 0,712	B= 0,766	C= 0,821	D= 0,897	E= 0,956
G= 0,80	A= 0,642	B= 0,705	C= 0,781	D= 0,871	E= 0,904
G= 0,90	A= 0,565	B= 0,638	C= 0,721	D= 0,819	E= 0,854
G= 1,00	A= 1,000	B= 0,664	C= 0,650	D= 0,659	E= 0,672
G= 1,10	A= 1,000	B= 0,661	C= 0,640	D= 0,648	E= 0,661
G= 1,20	A= 1,000	B= 0,651	C= 0,623	D= 0,637	E= 0,650
G= 1,30	A= 1,000	B= 0,637	C= 0,608	D= 0,616	E= 0,639
G= 1,40	A= 1,000	B= 0,616	C= 0,587	D= 0,595	E= 0,618
G= 1,50	A= 1,000	B= 0,587	C= 0,561	D= 0,567	E= 0,589
G= 1,60	A= 1,000	B= 0,550	C= 0,527	D= 0,531	E= 0,550
G= 1,70	A= 1,000	B= 0,507	C= 0,484	D= 0,488	E= 0,507
G= 1,80	A= 1,000	B= 0,459	C= 0,432	D= 0,433	E= 0,459
G= 1,90	A= 1,000	B= 0,406	C= 0,380	D= 0,382	E= 0,406
G= 2,00	A= 1,000	B= 0,349	C= 0,324	D= 0,327	E= 0,349
G= 2,10	A= 1,000	B= 0,288	C= 0,263	D= 0,266	E= 0,288
G= 2,20	A= 1,000	B= 0,223	C= 0,198	D= 0,199	E= 0,223
G= 2,30	A= 1,000	B= 0,154	C= 0,129	D= 0,130	E= 0,154
G= 2,40	A= 1,000	B= 0,082	C= 0,057	D= 0,057	E= 0,082
G= 2,50	A= 1,000	B= 0,009	C= 0,004	D= 0,004	E= 0,009
G= 2,60	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 2,70	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 2,80	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 2,90	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,00	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,10	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,20	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,30	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,40	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,50	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,60	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,70	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,80	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 3,90	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,00	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,10	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,20	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,30	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,40	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,50	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,60	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,70	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,80	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 4,90	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000
G= 5,00	A= 1,000	B= 0,000	C= 0,000	D= 0,000	E= 0,000

Fig. 4(**). — Wachtkostenbesparing in fracties der eenheid, numerisch weergegeven.

(**) A = PWB (1.g) D = PWB (4.g)
 B = PWB (2.g) E = PWB (5.g)
 C = PWB (3.g) G = g

werkers. Uit het oog mag inderdaad niet verloren worden dat van eerstgenoemden die de volle operationele verantwoordelijkheid dragen, de beslissing tot eventueel beroep op soortgelijk gespecialiseerd advies moet emaneren.

Het is slechts in de mate dat de practici kunnen beschikken over handigbruikbare toch theoretisch gefundeerde vuistregelen ter raming van de minimaal bij reorganisatie te verwachten besparingen dat zij hun vrees voor disproportionaliteit tussen baten en kosten bij het lanceren van meer gesophisticteerde studies van het type O.R. — vrees die in het verleden niet steeds ongegrond bleek te zijn — zullen overwinnen.

Gebruikte symbolen.

APWB : minimale PWB (functie van M alleen)

 g : trafiekintensiteit L_q^M : lengte der wachtrij in aantal eenheden (de bediende in het servicestation bevindende eenheid exclusief) bij M parallelle dienstposten

M : aantal initiële parallelle dienstposten

N : aantal eenheden der vragerspopulatie

PWB : procentuële besparing der wachtrijkosten (functie van M en g)

$$X(2, g) = \frac{(3-g)(g^2+4g+6)}{g(2-g)(2+g)} \quad (= \frac{1}{1-B})$$

$$X(3, g) = \frac{(4-g)(24+18g+6g^2+g^3)}{g(3-g)(g^2+4g+6)} \quad (= \frac{1}{1-C})$$

$$X(4, g) = \frac{(5-g)(120+96g+36g^2+8g^3+g^4)}{g(4-g)(24+18g+6g^2+g^3)} \quad (= \frac{1}{1-D})$$

$$X(5, g) = \frac{(6-g)(720+600g+240g^2+60g^3+10g^4+g^5)}{g(5-g)(120+96g+36g^2+8g^3+g^4)} \quad (= \frac{1}{1-E})$$

$$X'(2, g) = (1/\gamma_2) \times (-g^4 + 4g^3 + 50g^2 - 72)$$

$$X'(3, g) = (1/\gamma_3) \times (-g^6 + 84g^4 + 408g^3 + 108g^2 - 1152g - 1728)$$

$$X'(4, g) = (1/\gamma_4) \times (-g^8 - 4g^7 + 98g^6 + 1104g^5 + 3984g^4 + 1258g^3 - 20.016g^2 - 57.600g - 57.600)$$

$$X'(5, g) = (1/\gamma_5) \times (-g^{10} - 8g^9 + 92g^8 + 1968g^7 + 14.160g^6 + 44.160g^5 + 2880g^4 - 408.960g^3 - 1.621.440g^2 - 3.110.400g - 2.592.000)$$

 γ_i : een niet bepaalde veelterm, noemer der waarden $X'(i, g)$.