STANDARDS DE STOCK (*)

par A. DEWITTE,
Bell Telephone Mfg. C°, Anvers.

Avant d'aborder le fond du problème que je voudrais traiter aujourd'hui, j'aimerais vous donner quelques principes généraux en matière de stock.

Il faut distinguer d'une part :

A. — Le stock mouvementé moyen (working-stock)
et d'autre part :

B. — Le stock de sécurité (safety-stock).

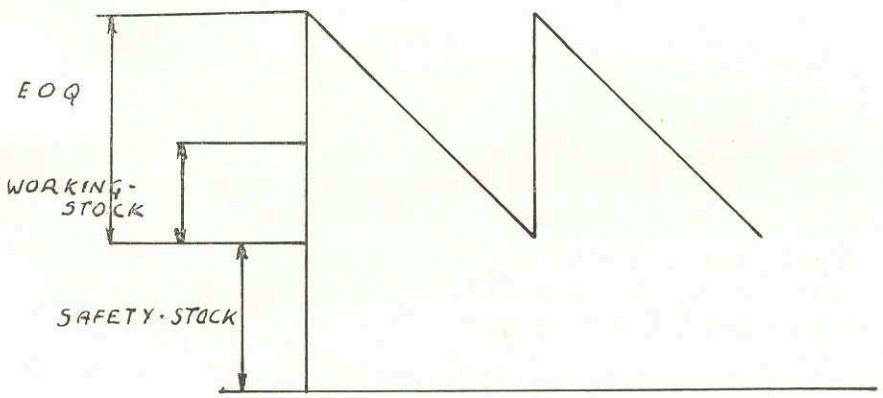


Fig. 1. — Schéma de l'écoulement des articles.

A. Le stock mouvementé moyen est évidemment la moitié de la quantité commandée la plus économique (E.O.Q.) (voir fig. 1).

B. Etant donné les variations de la demande et également le temps s'écoulant entre la passation de la commande et la réception des marchan-

---

(*) Conférence donnée à Bruxelles le 5 novembre 1962 sous les auspices de Fabrimétal.

Voordracht gehouden te Brussel op 5 november 1962 onder toezicht van Fabrimetal.

dises (c'est-à-dire le temps de circulation « lead time »), il est nécessaire de constituer et de maintenir un stock raisonnable destiné à faire face à des aléas.

En résumé, le stock de sécurité dépend de deux éléments essentiels :

1°) le temps de réapprovisionnement;

2°) la variation de la consommation.

Par contre, le stock mouvementé moyen est indépendant de ces éléments. Il est déterminé par la quantité commandée la plus économique.

La théorie de la quantité commandée la plus économique, basée sur l'équilibre optimum entre le coût de lancement d'une commande et le coût de stockage est bien connue. On a :

$$Q = \sqrt{\frac{2FV}{Cr}} \qquad (1)$$

avec :

Q = quantité commandée la plus économique,
F = coût de lancement de la fabrication,
V = consommation annuelle en quantité,
r = taux du coût de possession du stock par unité,
C = coût unitaire de la pièce.

L'investissement dû au stock est donc égal à la valeur du stock de sécurité plus la moitié de la valeur de la quantité commandée la plus économique. Pour établir des standards de stock ou autrement dit la plus jute somme à investir en stock et en-cours pour garantir la continuité de la production, il est nécessaire de calculer des valeurs séparées pour le stock mouvementé moyen et le stock de sécurité.

Un système a été mis au point pour calculer le stock mouvementé moyen de la quantité commandée la plus économique pour *l'ensemble* des articles.

Je voudrais maintenant examiner de plus près avec vous le problème tel qu'il s'est posé à la Bell Telephone.

Le nombre de pièces détachées entrant dans la fabrication de nos produits dépasse les 100.000. Dans ce nombre de pièces, 40.000 types environ doivent être disponibles en permanence. Il s'agit donc des pièces qui font l'objet du stockage et pour lesquelles il y a lieu de déterminer les standards de stock. La méthode de détermination des standards de stock est basée sur ce qu'on appelle l'Analyse A-B-C du Stock. Cette analyse a été appliquée initialement par la « General Electric » en Amérique.

Elle a révélé qu'un pourcentage très élevé de la valeur des articles correspond à un pourcentage très faible du nombre d'articles. Autrement dit, un petit nombre d'articles représente un stock important en valeur.

Schématiquement, cette analyse conduit à une situation du genre de celle indiquée à la figure 2.

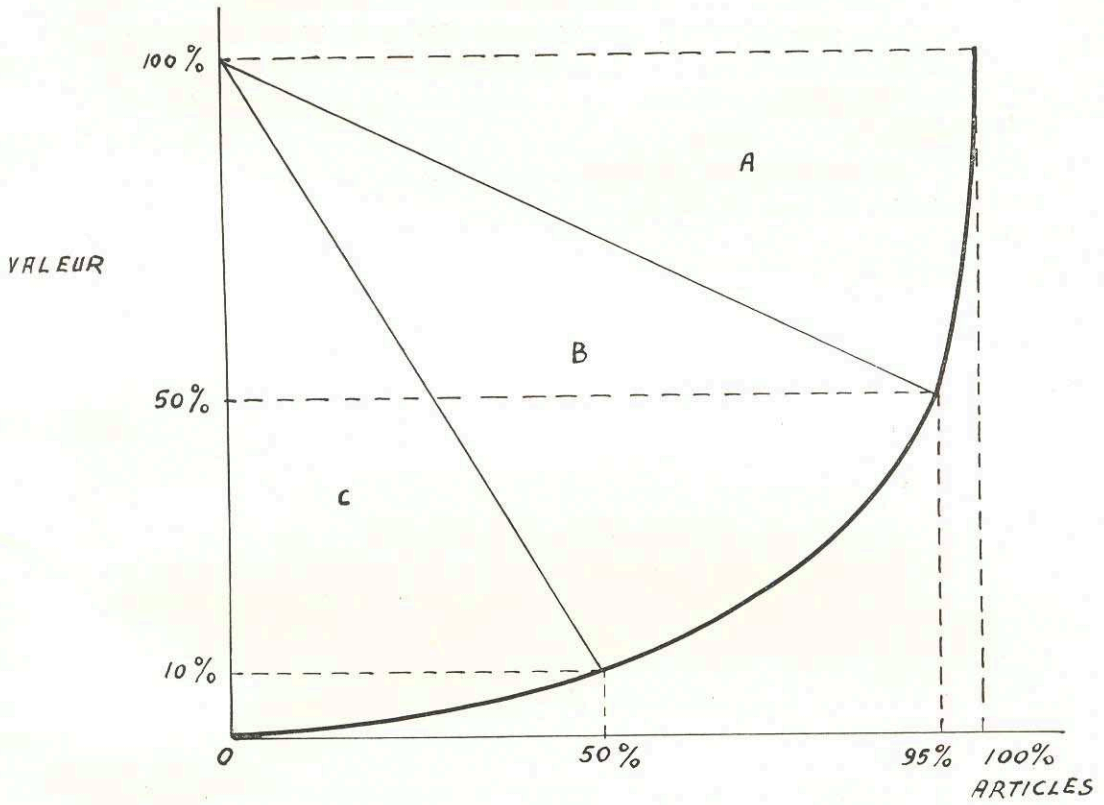


Fig. 2. — Répartition de la valeur du stock d'après le nombre d'articles correspondants.

Il ressort de ce diagramme que 5 % seulement des différents articles représentent 50 % de la valeur des articles stockés. Ces 5 % constituent la classe « A ».

Nous voyons aussi que 50 % des articles ne représentent qu'environ 10 % du capital immobilisé. Ce groupe d'articles forme la classe « C ». Quant aux 45 % restants, ils rentrent dans la classe « B ».

Comme vous pouvez vous en rendre compte, les articles de la classe « A » sont précisément les articles dont la consommation est la plus élevée en valeur.

Nous les appelons communément « les millionnaires ». Il va de soi que pour cette catégorie d'articles la détermination de la quantité la plus économique est d'une importance primordiale.

Il conviendra donc d'apporter un soin tout particulier au calcul de cette quantité et de s'assurer que l'exécution des commandes soit strictement respectée. Par contre, il en va tout autrement des articles des catégories « B » et « C », pour lesquels la quantité commandée et la fréquence des commandes ne doivent pas être rigoureusement respectées, ce qui permet d'ailleurs une certaine souplesse dans la programmation de la production des articles.

Les remarques qui précèdent sont entièrement valables pour la détermination du stock de sécurité.

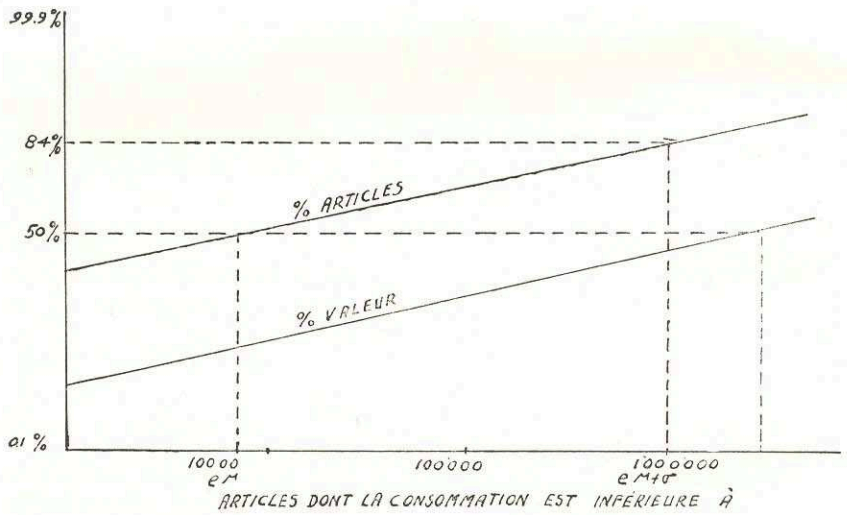


Fig. 3. — Distribution logarithmico-normale de la consommation des articles en nombre et en valeur.

Je me bornerai plus spécialement aujourd'hui au calcul des standards du stock mouvementé moyen.

Nous avons constaté à ce propos que, vu d'une manière cumulative, le pourcentage du nombre des articles ayant chacun une consommation annuelle inférieure à une certaine valeur par rapport au nombre total des articles suit une loi logarithmico-normale.

Il en est de même du pourcentage de la valeur cumulée de cet ensemble d'articles par rapport à la valeur globale de tous les articles.

Chacune de ces deux distributions a été représentée à la figure 3.

En abscisse, on a utilisé une échelle logarithmique qui donne respectivement les articles ayant une consommation annuelle en valeur inférieure à 10.000 F, 100.000 F, 1.000.000 de F, etc.

En ordonnée, l'échelle est gaussienne. Elle indique le pourcentage du nombre des articles ainsi que le pourcentage de la valeur de l'ensemble des articles. Des observations que nous avons faites et qui sont représentées par deux droites dans un système de coordonnées logarithmico-normales, il ressort que ces deux droites sont presque parallèles.

Cette constatation est, comme on le verra, une conséquence théorique de la distribution logarithmico-normale du nombre d'articles.

Revenons maintenant à la quantité commandée la plus économique.

Dans le cas d'un seul article, cette quantité est Q.

D'autre part, la valeur du stock mouvementé moyen est Q/2 multiplié par le coût unitaire de la pièce, donc (Q/2) C.

La formule applicable est de ce fait :

$$\frac{Q\,C}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,F}{r}}\,\sqrt{V\,C} \qquad (2)$$

Il est bien entendu que le taux r reste le même pour chaque article.

Pour le coût de lancement, il y a évidemment des différences, mais en pratique on peut prendre un seul chiffre suffisamment représentatif de l'ensemble. On peut donc considérer

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,F}{r}}$$

comme une constante, ce qui, en vertu de (2), ramène la détermination de la valeur du stock mouvementé moyen au calcul de l'espérance mathématique de $\sqrt{V\,C}$, sachant que V C est la consommation annuelle en valeur de tous les articles.

L'hypothèse d'une distribution logarithmico-normale de la valeur des articles rend ce calcul particulièrement aisé.

On se souviendra à ce sujet que la loi de probabilité normale est définie par la densité de probabilité :

$$P_1(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \qquad (4)$$

où μ est la moyenne et σ l'écart-type.

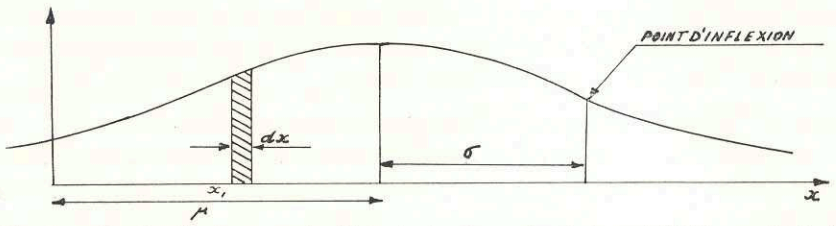
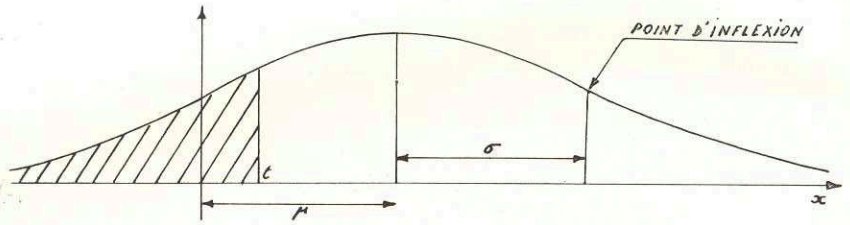


Fig. 4. — La distribution normale. L'aire hachurée représente la probabilité associée à dx.

En particulier, dans la figure 4, $P_1(x)\,dx$ indique, pour chaque dx, le rapport entre la surface du rectangle élémentaire construit sur dx et la surface totale de l'aire comprise sous la courbe normale.



Fif. 5. — La distribution normale. L'aire hachurée représente $\Phi_1(t) = P_r(x \leqslant t)$.

De plus, la fonction de distribution que l'on en déduit et qui donne (cf. fig. 5) le rapport entre la partie de la surface comprise sous la courbe de $-\infty$ à t et la surface totale a pour forme générale :

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \qquad (5)$$

Dans ces conditions, si on attribue à t successivement toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient pour $\Phi_1(t)$ la représentation graphique donnée à la figure 6.

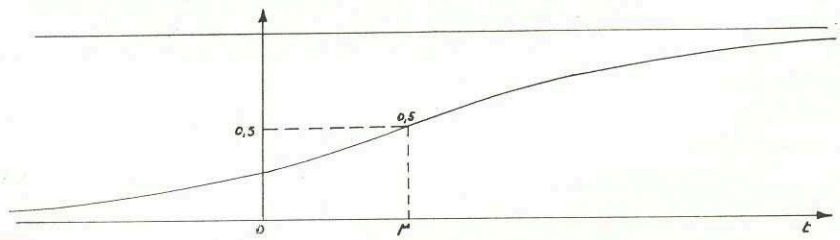


Fig. 6. — Variation de $\Phi_1(t)$ en fonction de t.

On voit ainsi que la moyenne μ correspond à la valeur de t pour laquelle le rapport de la surface comprise sous la courbe de $-\infty$ à t et la surface totale est égal à $1/2$, c'est-à-dire que la moyenne est aussi la médiane.

Cette loi se rencontre très fréquemment lorsque l'on a affaire à une variable aléatoire qui en principe n'est bornée ni vers les valeurs négatives ni vers les valeurs positives.

Dans le cas de la loi logarithmico-normale, la densité de probabilité s'écrit :

$$P_2(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{dx}{x} \qquad (6)$$

sachant qu'elle se confond avec la densité $P_1(t)\,dt$ où l'on a fait $t = \ln x$, et, de ce fait, $dt = dx/x$.

C'est la raison pour laquelle la fonction de distribution de cette dernière loi se présente sous la forme :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{dx}{x} \equiv \int_0^t P_2(x)\,dx \qquad (7)$$

On voit donc (fig. 7) que dans ce cas on retrouve une loi normale ordinaire dès que l'on considère la distribution du logarithme de la variable étudiée; en particulier, si μ est la moyenne de la distribution du logarithme de la variable, e^{μ} sera la médiane de la distribution de la variable elle-même.

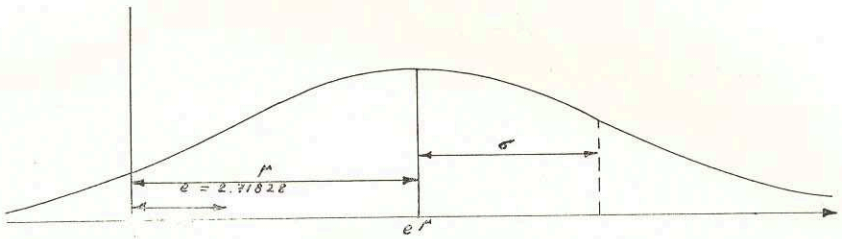


Fig. 7. — Loi logarithmico-normale représentée à l'aide d'une échelle logarithmique.

Il en résulte aussi que cette loi se distingue de la loi normale ordinaire par le fait que la variable aléatoire ne peut prendre que des valeurs non négatives, c'est-à-dire qu'elle est bornée inférieurement par zéro.

Enfin, on notera qu'ici la moyenne ne coïncide plus avec la médiane. Cette propriété est d'ailleurs un corollaire du calcul de l'espérance mathématique de x^k (moment d'ordre k) dans une telle distribution.

Si l'on pose en effet :

$$\overline{x^k} = \int_0^\infty x^k \, P_2(x) \, dx , \tag{8}$$

avec $x^k = e^{k \ln x}$, il vient :

$$\overline{x^k} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{2\sigma^2 k \ln x + \ln^2 x - 2\mu \ln x + \mu^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{x}$$

c'est-à-dire :

$$\overline{x^k} = e^{\mu k + \frac{k^2 \sigma^2}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln x - (\mu + k\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{x}$$

De plus, étant donné que :

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln x - (\mu + k\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{x} = 1 \tag{9}$$

nous avons par conséquent :

$$\overline{x^k} = e^{\mu k + k^2 \frac{\sigma^2}{2}} \tag{10}$$

Pour $k = 1$, nous obtenons :

$$\bar{x} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{\mu} e^{\frac{\sigma^2}{2}} \tag{11}$$

Il apparaît ainsi que la moyenne $\bar{x}$ est égale à la médiane multipliée par le facteur exp $(\sigma^2/2)$ appelé « facteur de table » (table factor).

De plus, comme de (11) on tire :

$$(\bar{x})^k = e^{k\mu + k \frac{\sigma^2}{2}}$$

on a finalement :

$$\overline{x^k} = (\bar{x})^k \, e^{\frac{k\,(k\,-\,1)}{2}\,\sigma^2} \tag{12}$$

On en déduit :

$$\overline{SR} = \overline{x^{1/2}} = \int_0^\infty \sqrt{x}\; P_2(x)\, dx = \sqrt{\bar{x}}\; e^{-\sigma^2/8} \tag{13}$$

qui est la valeur cherchée pour résoudre notre problème.

Cela étant, pour le calcul, on procède de la manière suivante. On détermine, pour l'échantillon examiné, la médiane ainsi que la valeur de la variable correspondant à la probabilité P = 84,13 %. Ces valeurs représentent respectivement :

$$e^{\mu} \qquad \text{et} \qquad e^{\mu\,+\,\sigma}$$

On calcule ensuite le quotient :

$$\rho = \frac{e^{\mu\,+\,\sigma}}{e^{\mu}} = e^{\sigma}$$

d'où l'on déduit :

$$\ln \rho = \sigma .$$

On en tire successivement le facteur :

$$e^{\sigma^2/2}$$

la moyenne :

$$e^{\mu} \times e^{\sigma^2/2}$$

de même que le facteur :

$$e^{-\sigma^2/8}$$

On obtient finalement ainsi la racine carrée moyenne :

$$\overline{SR} = \sqrt{\bar{x}}\; e^{-\sigma^2/8}$$

Pour ce qui concerne la distribution de la valeur cumulée des articles en % de la valeur totale, il suffit de noter que cette valeur est fournie par l'intégrale :

$$\int_0^x x\; P_2(x)\; dx$$

i	Intervalles de classe	f_i	$f_1 + \ldots\ldots + f_i$	$\frac{(f_1 + \ldots\ldots + f_i)}{\sum_1^n f_i} 100$
22	$5.000.000 \leqslant x$	3	3435	100
21	$4.000.000 \leqslant \quad < 5.000.000$	1	3432	99,9
20	$3.000.000 \leqslant \quad < 4.000.000$	2	3431	99,8
19	$2.000.000 \leqslant \quad < 3.000.000$	7	3429	99,8
18	$1.000.000 \leqslant \quad < 2.000.000$	23	3422	99,6
17	$750.000 \leqslant \quad < 1.000.000$	9	3399	98,9
16	$500.000 \leqslant \quad < 750.000$	25	3390	98,6
15	$250.000 \leqslant \quad < 500.000$	70	3365	97,9
14	$100.000 \leqslant \quad < 250.000$	217	3295	95,9
13	$90.000 \leqslant \quad < 100.000$	32	3078	89,6
12	$80.000 \leqslant \quad < 90.000$	49	3046	88,6
11	$70.000 \leqslant \quad < 80.000$	50	2997	87,2
10	$60.000 \leqslant \quad < 70.000$	52	2947	85,7
9	$50.000 \leqslant \quad < 60.000$	77	2895	84,2
8	$40.000 \leqslant \quad < 50.000$	87	2818	82,0
7	$30.000 \leqslant \quad < 40.000$	129	2731	79,5
6	$20.000 \leqslant \quad < 30.000$	179	2602	75,7
5	$10.000 \leqslant \quad < 20.000$	377	2423	70,5
4	$7.000 \leqslant \quad < 10.000$	194	2046	59,5
3	$3.000 \leqslant \quad < 7.000$	497	1852	53,9
2	$1.000 \leqslant \quad < 3.000$	657	1355	39,4
1	$1 \leqslant \quad < 1.000$	698	698	20,3
		3435		
		$\sum_1^n f_i$		

TABLEAU I

Distribution des articles consommés en fréquence et en valeur cumulée.

V_i	$V_1 + \ldots\ldots + V_i$	$\frac{(V_1 + \ldots\ldots + V_i)}{\sum_1^n V_i} 100$	$e^{\mu} = 6300$
20.975.804	204.047.131	100	$\rho = \frac{e^{\mu+\sigma}}{e^{\mu}} = e^{\sigma}$
4.357.200	183.071.327	89,7	$= 8{,}888$
6.408.460	178.714.127	87,5	
16.844.214	172.305.667	84,4	$\sigma = \ln \rho$
31.533.929	155.461.453	76,1	$= 2{,}1848$
7.882.836	123.929.524	60,7	
14.910.299	116.044.688	56,8	$e^{\sigma^2/2} = 10{,}87645$
23.448.397	101.134.389	49,5	
34.866.191	77.635.992	38,0	$e^{\sigma^2} = (e^{\sigma^2/2})^2$
3.030.709	42.819.801	20,9	$= 118{,}287$
4.159.934	39.789.092	19,4	
3.799.682	35.629.158	17,4	$e^{-(\sigma^2/8)} = 0{,}55068$
3.375.872	31.829.476	15,5	
4.331.529	28.453.604	13,9	$\bar{x} = e^{\mu} \times e^{\sigma^2/2}$
3.975.097	24.122.095	11,8	$= 68.521{,}635$
4.634.420	20.146.978	9,8	
4.441.478	15.512.558	7,6	$e^{\mu_c} = e^{\mu} \times e^{\sigma^2}$
5.629.767	11.071.084	5,4	$= 745.208{,}1$
1.642.066	5.441.317	2,6	
2.345.245	3.799.251	1,8	$\overline{SR} = \sqrt{\bar{x}} \cdot e^{-(\sigma^2/8)}$
1.156.141	1.454.006	0,7	$= 144{,}11296$
297.865	297.865	0,14	
204.047.131			
$\sum_1^n V_i$			

Stock mouvementé moyen :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2F}{r}} \times N \times \overline{SR}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 \times 400}{0{,}20}} \times 3435 \times 144{,}113 = 15.652.785{,}36$$

Comme cette intégrale n'est autre que l'intégrale (8) où l'on a fait $k = 1$ et où la limite supérieure ∞ est remplacée par x, il ressort de (9) que la médiane de la distribution est $(\mu + \sigma^2)$ tandis que l'écart-type de la distribution normale associée est encore σ.

Il en résulte que la valeur cumulée médiane (moitié de la valeur globale) est fournie par la relation :

$$e^{\mu_c} = e^{\mu} \times e^{\sigma^2}$$

ce qui fixe entièrement la distribution des articles en fonction de la valeur cumulée.

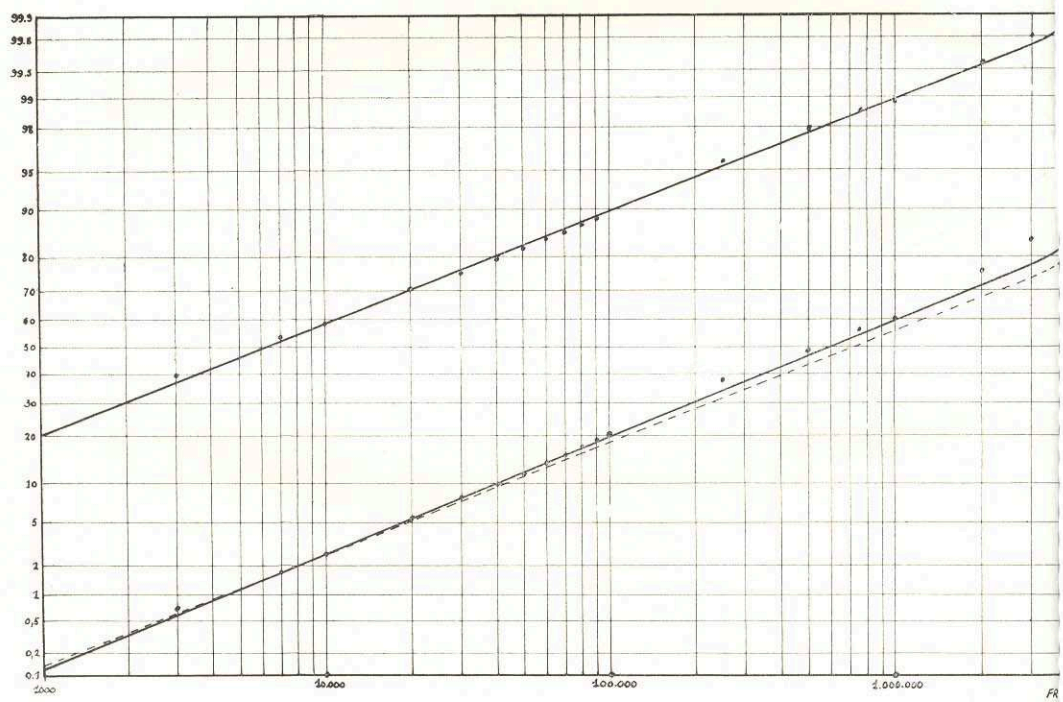


Fig. 8. — Représentation graphique des distributions des articles en fréquence et en valeur cumulée. En traits pleins les droites ajustées, en ponctués la droite théorique correspondant à la valeur cumulée.

Le tableau I ci-avant donne le détail des calculs pour un exemple particulier; la représentation graphique correspondante se trouve indiquée à la figure 8.

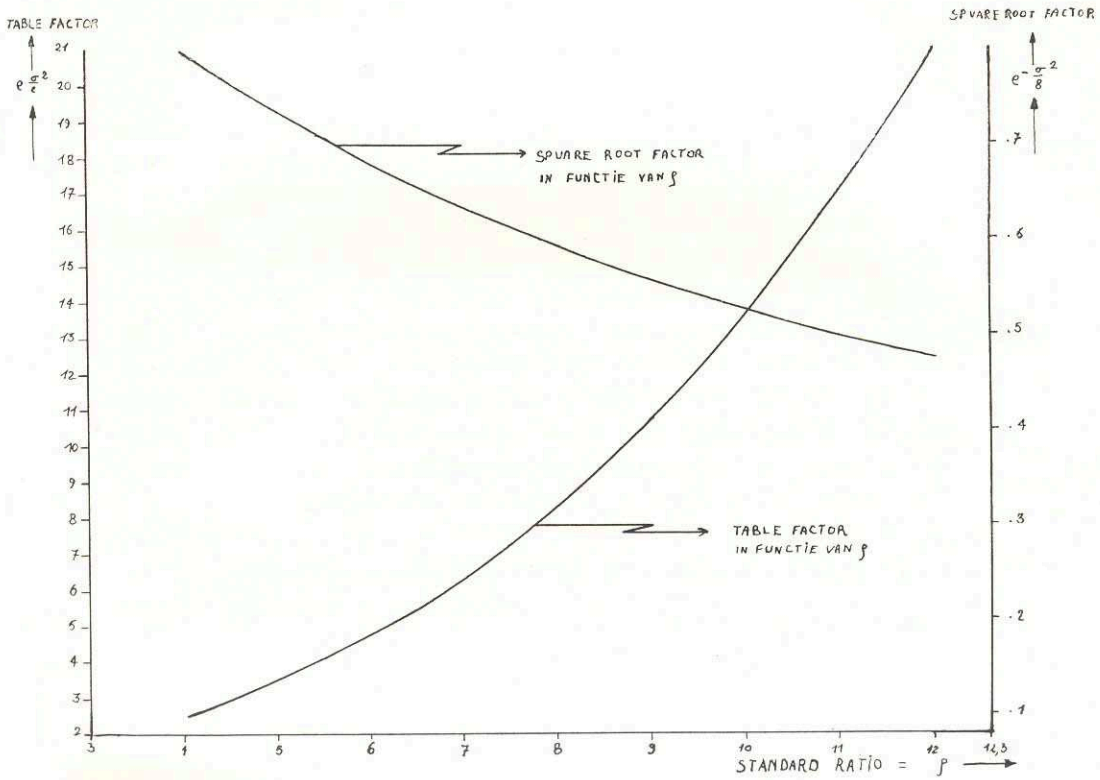


Fig. 9. — Valeurs de $e^{(\sigma^2/2)}$ et de $e^{-(\sigma^2/8)}$ en fonction du rapport ρ.

Par ailleurs, la figure 9 fournit une graphique permettant d'estimer directement $e^{\sigma^2/2}$ et $e^{-(\sigma^2/8)}$ à partir de ρ.