

**LA DETERMINATION DU NOMBRE OPTIMUM
DES VOIES TELEPHONIQUES
PAR UNE METHODE DE SIMULATION**

par J. PONCIN
Etat-Major Général

Section I. — Position du problème.

1. Introduction.

De nombreux ouvrages ayant pour objet l'étude de l'effectif de lignes à prévoir, dans les réseaux téléphoniques, ont été publiés depuis la parution des premiers travaux de l'ingénieur danois ERLANG. Tous les documents que nous avons pu lire traitent de la téléphonie commerciale et tiennent compte de l'augmentation constante du nombre d'abonnés. D'autre part, les théories proposées sont des modèles mathématiques, forcément stylisés, et ne répondent pas toujours d'une manière satisfaisante à la réalité.

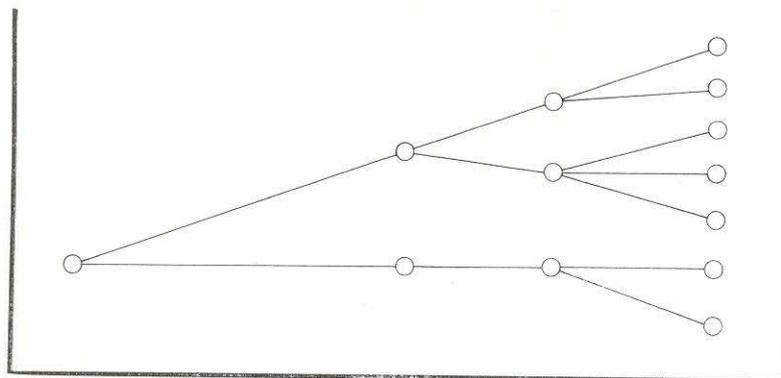


Fig. 1. — Réseau hiérarchisé.

Les réseaux téléphoniques étudiés ci-après sont exploités dans un but purement utilitaire et leur objet n'est pas d'en retirer des avantages financiers.

Ils présentent la caractéristique de pouvoir être classés en trois catégories, à savoir : les réseaux hiérarchiques, maillés ou mixtes, représentés par les figures 1, 2 et 3.

Les cercles sont des centraux téléphoniques.

Les carrés représentent des stations passives dont les buts principaux sont d'assurer la transmission et la commutation.

Dans le système hiérarchisé, le chemin entre deux abonnés est unique, tandis que dans les deux autres cas il existe un choix discret destiné à pallier les défaillances de certains centraux ou la saturation des tronçons qui les relient, on augmente ainsi la sécurité de fonctionnement, aux dépens de la simplicité. Ce sont les conditions d'utilisation qui indiquent la méthode la mieux adaptée aux exigences de la situation.

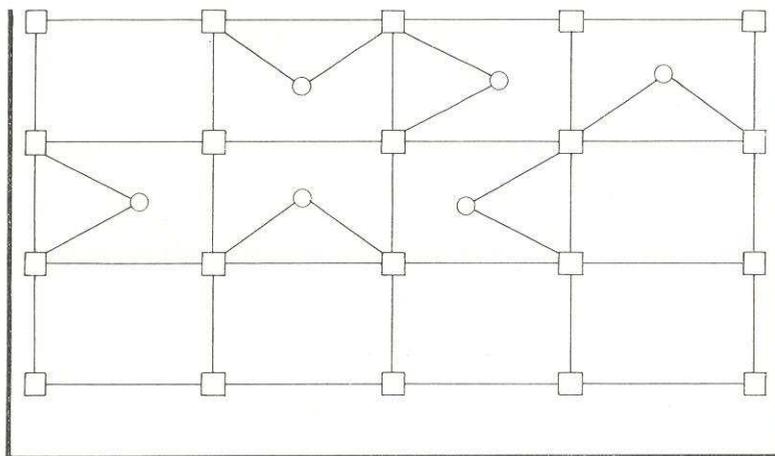


Fig. 2. — Réseau maillé.

Tout au long du texte nous donnerons le même sens aux mots « lignes » et « voies » car cet article s'adresse aussi bien aux réseaux constitués par des fils et des câbles qu'à ceux formés par des stations de câbles hertziens.

Nous avons divisé le travail en trois parties. La première est consacrée à l'étude d'un tronçon, c'est-à-dire de la liaison entre deux centraux ; la deuxième partie traite d'un réseau hiérarchisé, et la troisième d'un réseau maillé.

2. Position du problème.

Si nous observons une liaison téléphonique entre deux centraux, les seuls éléments, en dehors des supports matériels, dont nous pouvons avoir une connaissance expérimentale sont la répartition des appels dans le temps et les durées des communications. Il faudra faire intervenir ces données, de caractère aléatoire, dans toute solution du problème en cause.

Nous nous trouvons en présence d'un phénomène d'attente. En effet, les appels sont les clients qui se présentent aux lignes, semblables aux stations de la théorie classique.

Les durées de service sont représentées par les durées des communications. Une caractéristique importante cependant : la file d'attente proprement dite est toujours nulle en téléphonie automatique, car les appels survenant quand toutes les lignes sont occupées doivent être considérés comme perdus.

Un des buts recherchés est précisément de limiter ces appels perdus à un pourcentage donné, soit, par exemple, 10 % dans la plupart des cas et 1 % dans les réseaux maillés

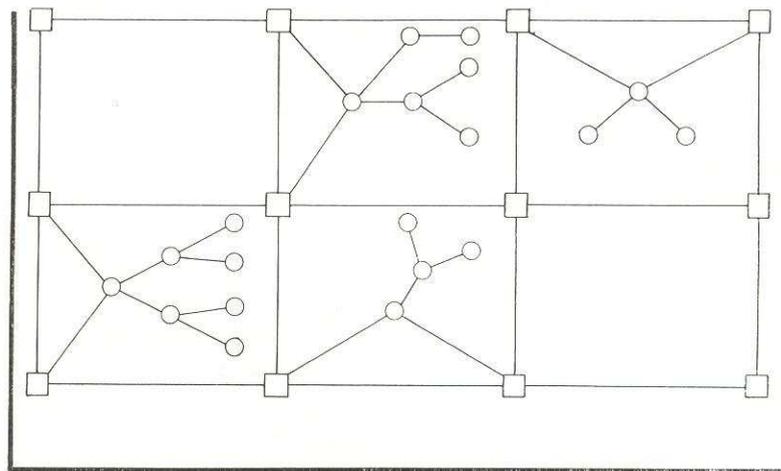


Fig. 3. — Réseau mixte.

On pourrait envisager une solution théorique au problème posé, à condition que les variables aléatoires aient une distribution connue analytiquement. Il nous est toutefois apparu plus général d'utiliser des méthodes de simulation qui, contrairement à une opinion assez répandue, ne sont pas des moyens extrêmes à n'employer qu'après avoir épuisé toutes les autres ressources. Au contraire, la simulation permet de serrer la réalité de plus près et conduit à des résultats d'utilisation pratique immédiate.

Section II. — Etude d'un tronçon.

1. Les données.

Considérons deux centraux téléphoniques A et B reliés entre eux par des circuits dont nous nous proposons de déterminer le nombre optimum, en acceptant un risque de 10 % de non réalisation des liaisons. Après avoir observé, d'une manière générale, le volume de trafic sur l'ensemble des voies, nous avons adopté le plan d'expériences ci-après.

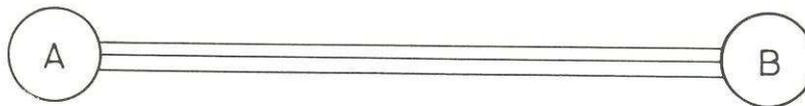


Fig. 4.

Pendant 250 périodes de 10 minutes, prises au hasard, nous comptons le nombre d'appels qui surviennent entre A et B. Nous obtenons ainsi la dis-

tribution expérimentale qui fait l'objet du tableau I. Nous constatons que le nombre d'appels en 10 minutes varie de 3 à 28, avec les fréquences mentionnées dans la colonne f. La moyenne des appels est de 10,54 en 10 minutes et l'écart-type de 4,84. La dispersion est donc assez grande.

La deuxième variable aléatoire est la durée des communications ; elle s'obtient en observant, au hasard, 750 conversations téléphoniques.

Le tableau II donne la distribution obtenue.

La durée moyenne est de 5,1 minutes et l'écart-type de 4,33.

Une notion importante est celle d'intensité moyenne du trafic (ψ) dont la valeur est égale au produit des deux moyennes ci-dessus, rapportées à la même unité de temps, que nous prenons ici égale à une minute.

$$\psi = \frac{10,54}{10} \times 5,1 = 5,38$$

Pour qu'il puisse y avoir écoulement du trafic, sans augmentation continue des appels perdus, nous devons avoir un nombre de circuits supérieur à 5,38 soit au moins 6. Nous obtenons ainsi une borne inférieure du nombre de lignes à prévoir, elle ne constitue pas une solution du problème posé car elle ne tient pas compte de la contrainte qui fixe la limite supérieure des appels perdus à 10%.

Les tableaux I et II fournissent également les fréquences relatives cumulées, au moyen desquelles on peut tracer les fonctions de répartition des tableaux III et IV. Ces fonctions vont nous servir de base pour l'obtention d'une solution.

2. Principe de la simulation.

- a. Nous allons simuler le fonctionnement du tronçon téléphonique au moyen d'un ordinateur IBM 1620. Pour ce faire nous aurons besoin d'une série de nombres aléatoires, qui sera produite par l'ordinateur lui-même selon le procédé ci-après.

Un ensemble de nombres (A_i) est constitué suivant la formule

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= k.A_n \\ \text{avec } A_0 &= 1 \\ \text{et } k &= 7^9 = 40.353.607 = A_1. \end{aligned}$$

On procède à des multiplications successives jusqu'à obtention d'un nombre de 20 chiffres. A partir de ce moment, on ne conserve que les 8 derniers chiffres pour constituer la table au hasard. La série ne peut pas être considérée comme aléatoire avec une certitude absolue. Aussi certaines précautions devront être prises lors de l'exploitation des résultats.

- b. Nous allons exposer maintenant le principe de la simulation.

TABLEAU I
Distribution des appels

x	f	fc	γ^c
0	—	—	—
1	—	—	—
2	—	—	—
3	8	8	0,032
4	7	15	0,060
5	19	34	0,136
6	16	50	0,200
7	25	75	0,300
8	20	95	0,380
9	23	118	0,472
10	26	144	0,576
11	16	160	0,640
12	19	179	0,716
13	15	194	0,776
14	9	203	0,812
15	9	212	0,848
16	6	218	0,872
17	9	227	0,908
18	7	234	0,936
19	3	237	0,948
20	3	240	0,960
21	1	241	0,964
22	3	244	0,976
23	1	245	0,980
24	1	246	0,984
25	2	248	0,992
26	1	249	0,996
27	—	249	0,996
28	1	250	1
Totaux	250		

Légende :

x = nombre d'appels en 10 minutes $\sigma^2 = 23,29$ f = fréquences observées $\sigma = 4,84$ fc = fréquences cumulées $\gamma^c =$ fréquences relatives cumuléesm = $10 + 135/250 = 10,54$

TABLEAU II
Durées des communications téléphoniques

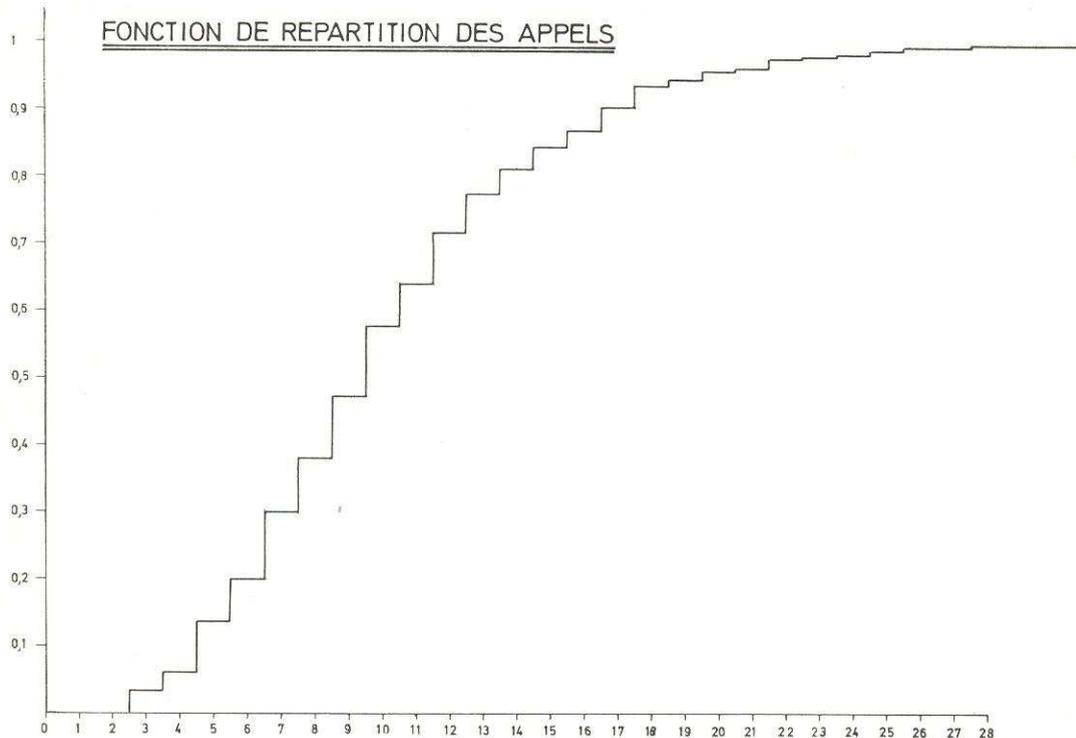
x en minutes	f	fc	γ^c
1	85	85	0,113
2	133	218	0,291
3	114	332	0,443
4	92	424	0,525
5	84	508	0,677
6	58	566	0,755
7	37	603	0,804
8	30	633	0,844
9	27	660	0,880
10	27	687	0,916
11	12	699	0,932
12	13	712	0,948
13	7	719	0,950
14	4	723	0,964
15	3	726	0,968
16	3	729	0,972
17	6	735	0,980
18	3	738	0,984
19	3	741	0,988
20	2	743	0,991
21	2	745	0,993
22	—		
23	—		
24	—		
25	—		
26	1	746	0,995
27	—		
28	1	747	0,996
29	—		
30	—		
31	—		
32	1	748	0,997
33	—		
34	—		
35	—		
36	—		
37	1	749	0,999
38	—		
39	—		
40	1	750	1

Légende :

x = durée des communications
f = fréquences observées
fc = fréquences cumulées
 $\sigma^2 = 18,74$

$\sigma = 4,33$
 $\gamma^c =$ fréquences relatives cumulées
m = 5,1

TABLEAU III

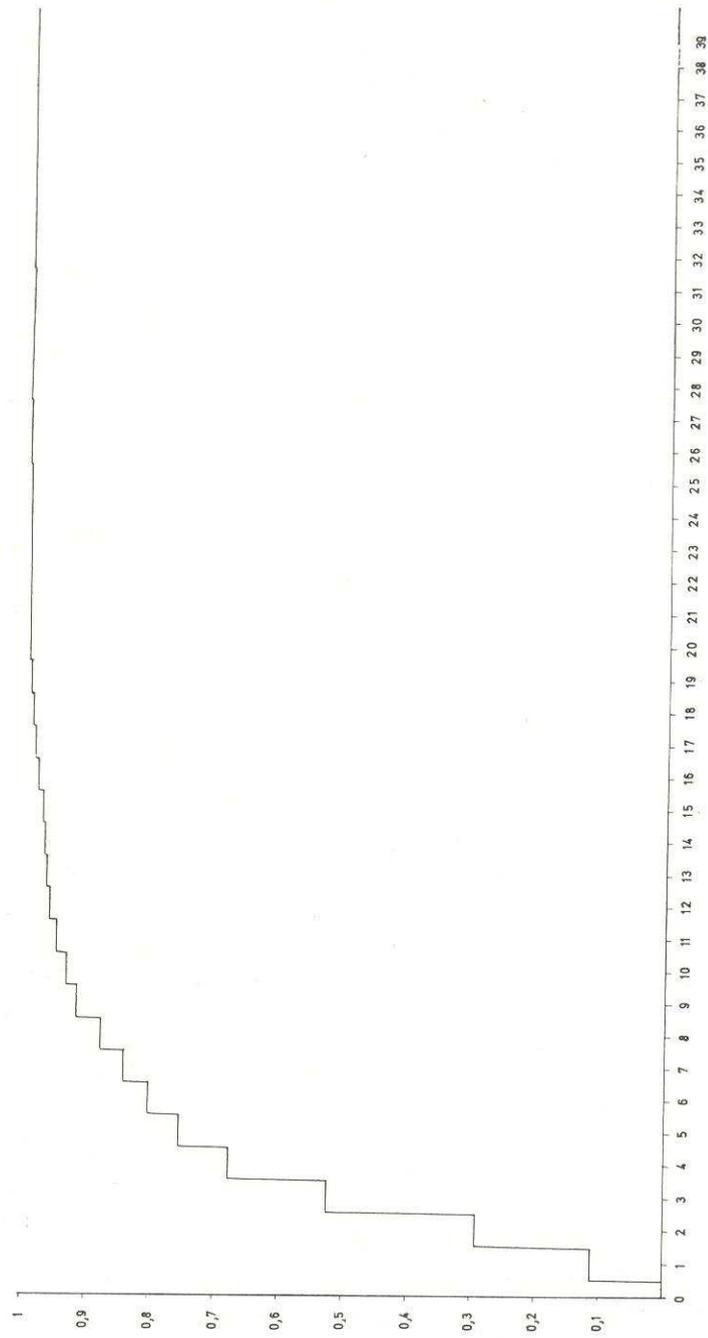


Nous tirons dans la table au hasard un nombre compris entre 0 et 100 ; il représente l'ordonnée de la fonction de répartition des appels. Il lui correspond une abscisse qui indique le nombre N d'appels enregistrés en 10 minutes. Les valeurs lues doivent être entières. Exemple : si le nombre aléatoire tiré est 45, le nombre d'appels correspondant, lu sur le tableau III, est 9. La distribution expérimentale n'étant pas de POISSON, l'hypothèse d'une répartition uniforme pendant les dix minutes en cause ne peut être retenue. Nous supposons alors une répartition au hasard qui sera tirée au moyen de la série pseudo-aléatoire(*).

Pour chacun de ces appels, nous allons déterminer la durée de la conversation téléphonique. Nous procédons alors comme suit : tirage au hasard d'un nombre compris entre 0 et 100 (ordonnée de la fonction de répartition des

(*) Le nombre d'appels obtenu au moyen du tableau III est supposé réparti au hasard dans l'intervalle de 10 minutes considéré. Pour connaître les moments auxquels surviennent ces appels, on fait appel à la série de nombres aléatoires, en prenant pour chaque appel un chiffre compris entre 0 et 10.

TABEAU IV
FONCTION DE REPARTITION DES DUREES DE COMMUNICATIONS



durées), auquel correspond une abscisse donnant la durée de la conversation téléphonique (tableau IV). Nous enregistrons et nous classons les débuts et les fins de communications. A tout instant nous pouvons donc déterminer la quantité de lignes occupées car elle correspond au nombre de conversations en cours. Après dix minutes, nous faisons le bilan des lignes encore occupées et de l'instant de leur libération et nous itérons le processus. Le tronçon de l'étude est soumis à ces opérations pendant des périodes de 1000 minutes à la fin desquelles l'ordinateur fournit les renseignements ci-après :

- (1) A = nombre pseudo-aléatoire de départ de la simulation.
 - (2) Le nombre de lignes occupées et pour chacune d'elles le temps d'occupation.
 - (3) Le nombre d'appels enregistrés sur chaque ligne, à interpréter comme suit : pendant le temps d'occupation de n lignes, il y a eu x appels.
 - (4) Nombre total d'appels pendant la simulation. Ce renseignement permet d'exercer un premier contrôle sur la valeur de la simulation, car ce nombre doit être voisin de 1054 pour les 1000 minutes ($10,54 \times 100$).
 - (5) Nombre d'appels refusés (éventuellement).
 - (6) A = dernier nombre aléatoire utilisé.
- c. Certaines précautions sont prises pour assurer, sans discussion, la validité de la simulation :
- (1) Le nombre aléatoire de départ diffère à chaque simulation de 1000 minutes, il est obtenu en procédant, à vide, à plusieurs opérations constitutives de la série.
 - (2) La simulation réelle ne démarre qu'après plusieurs tranches de 10 minutes pour éliminer les phénomènes transitoires.
 - (3) Dans une première phase comportant trois essais de 1000 minutes, le nombre de lignes supposées existantes entre les terminaux A et B a été pris suffisamment élevé pour n'avoir à enregistrer aucun refus.
 - (4) Une fois obtenus les résultats des essais, ceux-ci sont soumis à un test non paramétrique de KRUSKAL et WALLIS afin de contrôler l'homogénéité des populations et rejeter, éventuellement, les échantillons non conformes.

3. Présentation des résultats.

Le tableau V fournit les résultats relatifs aux appels.

La moyenne des lignes occupées est 6,68 avec un écart type de 2,74.

Après calcul des fréquences relatives cumulées, nous constatons que 90 % des appels ($\gamma_c = 0,9103$) se concentrent sur l'occupation de 10 lignes, qui est le nombre que nous nous proposons de trouver. Remarquons cependant que la ligne 10 enregistre 163 appels, pour un temps d'occupation de 83,02 minutes, soit en moyenne 0,51 minutes ce qui est très faible par rapport à la durée moyenne des communications qui est de 5,1 minutes. Nous déduisons de ce fait que peu de temps après le début d'une conversation sur la 10^{me} ligne,

TABLEAU V

Distribution des appels

Ligne	f	fc	γ_c
1	31	31	0,0097
2	93	124	0,0387
3	215	339	0,1059
4	348	687	0,2146
5	455	1142	0,3568
6	468	1610	0,5030
7	455	2065	0,6451
8	403	2468	0,7710
9	283	2751	0,8594
10	163	2914	0,9103
11	117	3031	0,9469
12	75	3106	0,9703
13	50	3156	0,9859
14	18	3174	0,9916
15	12	3186	0,9953
16	9	3195	0,9981
17	2	3197	0,9988
18	3	3200	0,9997
19	1	3201	1

$m = 6,68$

$\sigma^2 = 7,48$

$\sigma = 2,74$

f = fréquences observées

fc = fréquences cumulées

 γ_c = fréquences relatives cumulées.

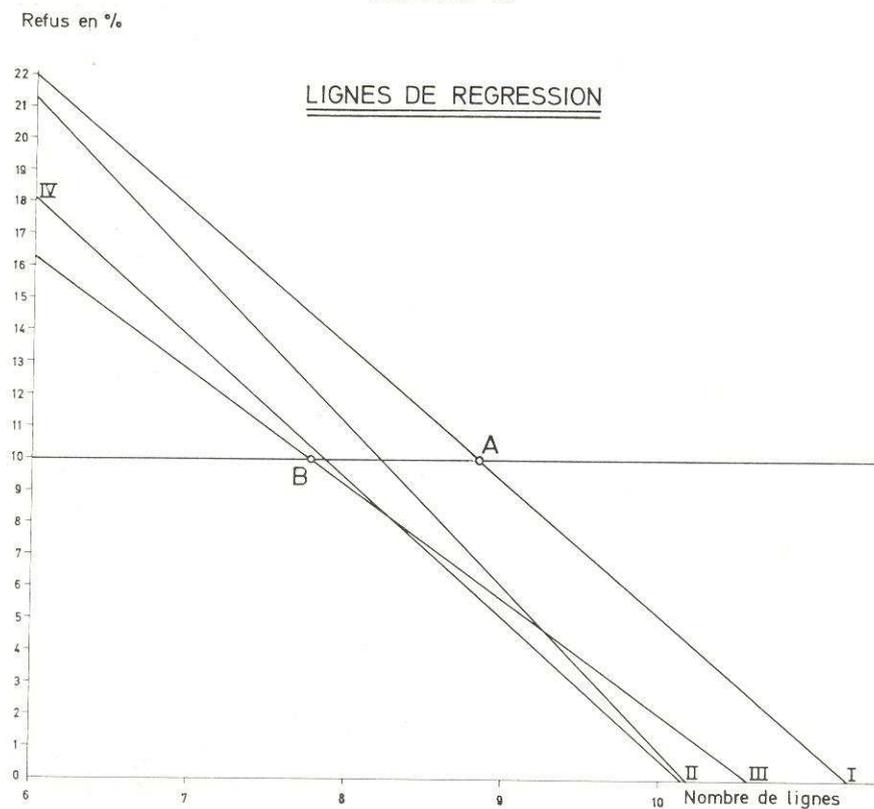
et à fortiori sur les suivantes, il y a libération d'un circuit par fin de communication. Si l'abonné appelant trouve tous les circuits occupés, il aura intérêt à rappeler après un court délai. Nous allons examiner ce phénomène plus en détail.

4. Limitation des circuits et introduction de la patience des abonnés.

Nous allons maintenant recommencer la simulation en limitant le nombre de voies entre A et B successivement à 10, 9, 8, 7 et 6 lignes et en enregistrant le pourcentage des refus. Nous supposons tout d'abord que l'abonné ne rappelle pas si tous les circuits sont occupés, ensuite nous admettons qu'il rappelle après 0,5, 1 et 1,5 minutes.

Ces opérations sont recommencées plusieurs fois et nous calculons ensuite les lignes de régression correspondant à chacun des cas envisagés. Le tableau VI résume les résultats obtenus.

TABLEAU VI



Nous en concluons :

- a. que la simple limitation du nombre de lignes répartit mieux le trafic et sans introduire la patience des abonnés on peut réduire le nombre de voies à 9 entre A et B ;
- b. que les rappels font encore gagner un circuit si la patience de l'abonné est fixée à 1 minute. En deçà et au-delà la situation n'est pas aussi bonne, comme le montrent les droites II et IV au niveau 10 %. Dans l'exemple considéré la moyenne des appels est 10,54 en 10 minutes, soit environ 1 par minute. Il y a vraisemblablement une relation entre ce fait et la durée optimale du temps de patience.

Une étude de l'occupation moyenne des lignes, fournit le tableau ci-dessous qui donne une idée du rendement de la liaison :

Nombre de lignes	Temps d'occupation en %
19	28,52
10 (sans rappel)	51,29
9 (sans rappel)	55,80
8 (avec rappel après 1')	62,50

Section III. — Etude d'un réseau hiérarchisé.

1. Généralités.

En utilisant la méthode décrite ci-dessus, nous pouvons étudier un réseau hiérarchisé, en le décomposant en tronçons et en procédant sur chacun de ceux-ci aux opérations de simulation. De proche en proche, nous déterminons ainsi le nombre optimal de circuits à prévoir entre centraux. Le cas du réseau maillé est sensiblement plus compliqué et fait l'objet de la Section IV.

2. Les données.

La figure 5 donne la constitution du réseau soumis à l'examen. Les chiffres romains servent à identifier le tronçon et les chiffres arabes indiquent le nombre de lignes existantes.

Pour chacune des liaisons, nous avons observé :

- a. le nombre des appels survenant pendant 10' ou 30' ; cette expérience est répétée entre 100 et 250 fois, selon les possibilités. Les périodes de surveillance sont prises au hasard ;

- b. les durées des communications téléphoniques, épreuves aléatoires relevées un nombre suffisant de fois, suivant tirage au sort.

3. La simulation.

Suivant la méthode exposée dans la section précédente, nous exécutons, pour chaque tronçon des simulations d'une durée de 1000 minutes.

RESEAU TELEPHONIQUE HIERARCHISE

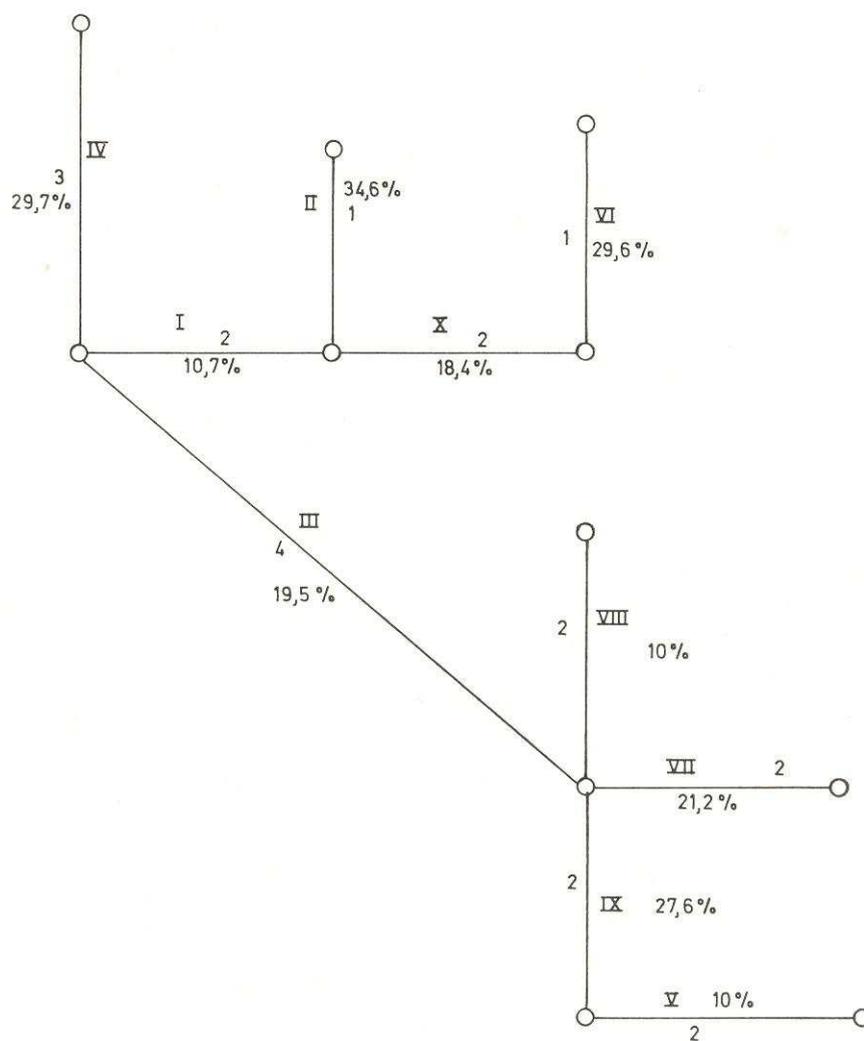


Fig 5.

L'ordinateur, après calcul, fournit :

- la longueur des étapes (10' ou 30') ;
- les durées d'occupations des lignes ;
- le nombre d'appels sur chaque ligne ;
- le nombre total des appels.

Au moyen des résultats ainsi obtenus :

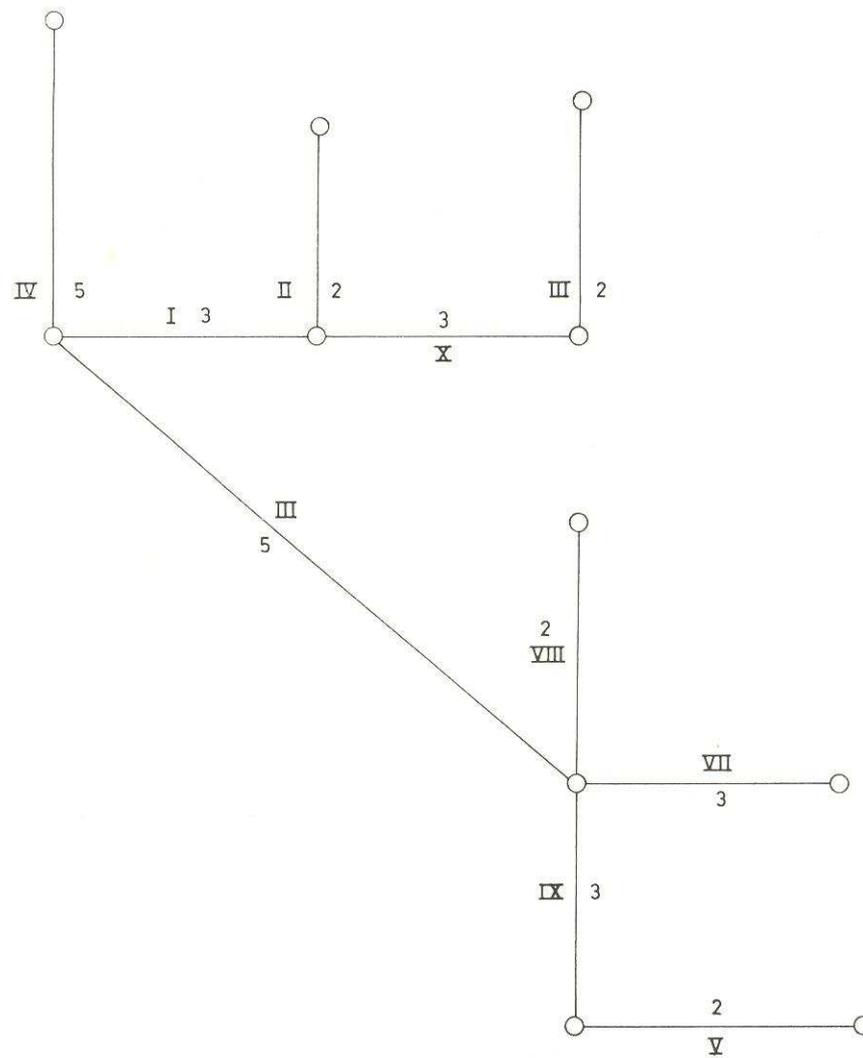


Fig. 6.

- a. Nous calculons les pourcentages de refus auxquels il faut s'attendre sur un réseau composé comme à la figure 5. Ceux-ci sont indiqués sur chaque tronçon.
- b. Nous traçons le nouveau réseau en limitant les refus à 10%. Nous obtenons ainsi la figure 6.

4. Régression linéaire.

Nous pouvons nous demander s'il n'existe pas une relation fonctionnelle entre l'intensité du trafic ψ et le nombre de circuits à prévoir dans chaque tronçon. Nous constatons, calculs effectués, qu'il y a régression linéaire.

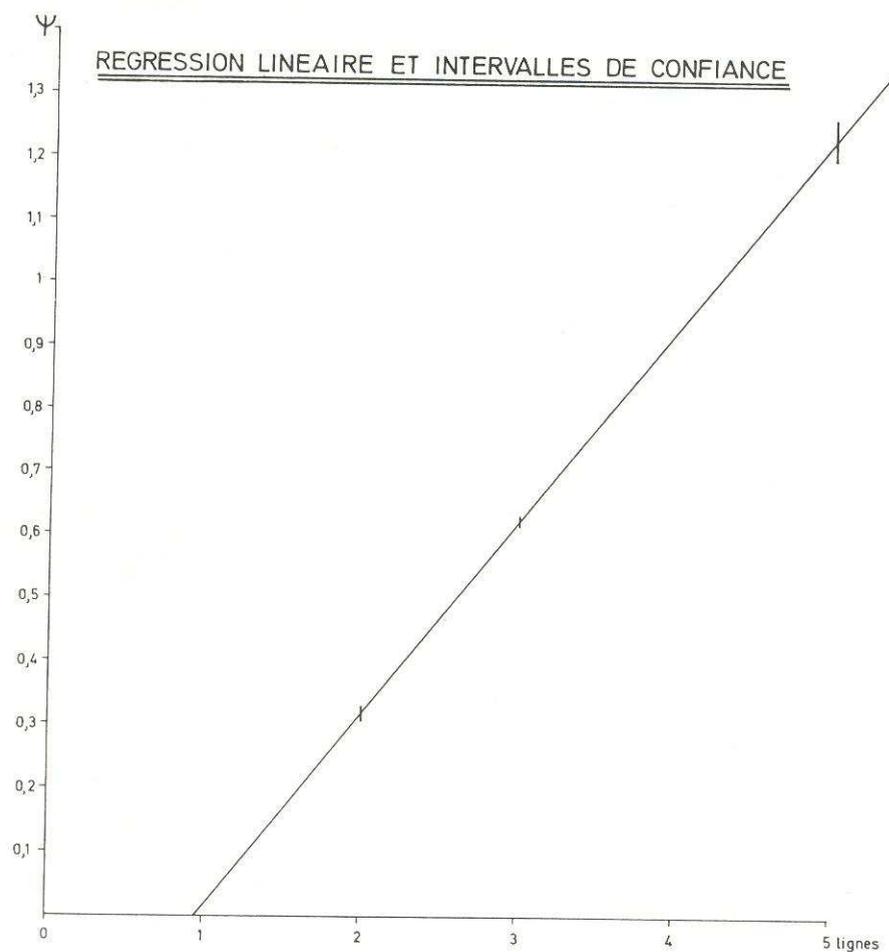


Fig. 7.

L'équation de la droite est :

$$y = 0,304 x - 0,29$$

La figure 7 représente la droite de régression, avec les intervalles de confiance aux niveaux 2, 3 et 5 lignes. Pour rappel, les intervalles de confiance indiquent la dispersion probable des ordonnées de part et d'autre de chaque point représentatif de la droite.

Section IV. — Etude d'un réseau maillé.

1. Position du problème.

- a. Afin de fixer les idées nous allons étudier le réseau maillé représenté par la figure 8.

Les cercles sont des centraux téléphoniques qui reçoivent et émettent des appels suivant des distributions observables. Nous les appellerons terminaux actifs. Les carrés, au contraire, constituent des « plaques tournantes » du réseau. Ils sont passifs et leur rôle est la commutation, c'est-à-dire l'aiguillage des communications téléphoniques vers leur destination finale, qui est toujours un cercle. Afin d'éviter toute confusion, les terminaux actifs sont numérotés tandis que les stations passives sont identifiées par une lettre majuscule.

- b. Par convention, les lignes aboutissant à un cercle seront appelées « lignes d'abonnés », par opposition aux voies entre les stations passives qui seront dénommées « lignes inter ».
- c. Nous allons formuler deux hypothèses simplificatrices pour rendre plus aisée la solution du problème, sans entamer sa rigueur.

- (1) Comme chaque source active est reliée, tout au plus, à deux stations passives, et ce uniquement au moyen de lignes d'abonnés, nous pouvons la supposer reportée identiquement aux stations passives auxquelles elle se rapporte, en répartissant les appels entre les deux stations passives, là où cela sera nécessaire.

Exemples : Les points 1, 2 et 19 peuvent être reportés identiquement en A, par contre les points 5 et 6 ne peuvent être reportés que partiellement, suivant une loi à déterminer.

Remarque : Les points 17, 18, 19 et 20 représentent des sources qui se répètent au-dessus et en-dessous de la figure 7.

- (2) Une conséquence directe du paragraphe précédent est de ne pas limiter le nombre de circuits des « lignes d'abonnés ».

Comme cette hypothèse est peu réaliste, on peut la corriger en admettant, aux stations passives intéressées, l'existence d'une source fictive qui absorberait les appels normalement refusés.

- d. En résumé, chaque station passive sera la source fictive émettrice ou réceptrice d'appels ayant une distribution aléatoire composite fonction des sources réelles qu'elles remplacent. Il en sera de même pour les durées de conversations.

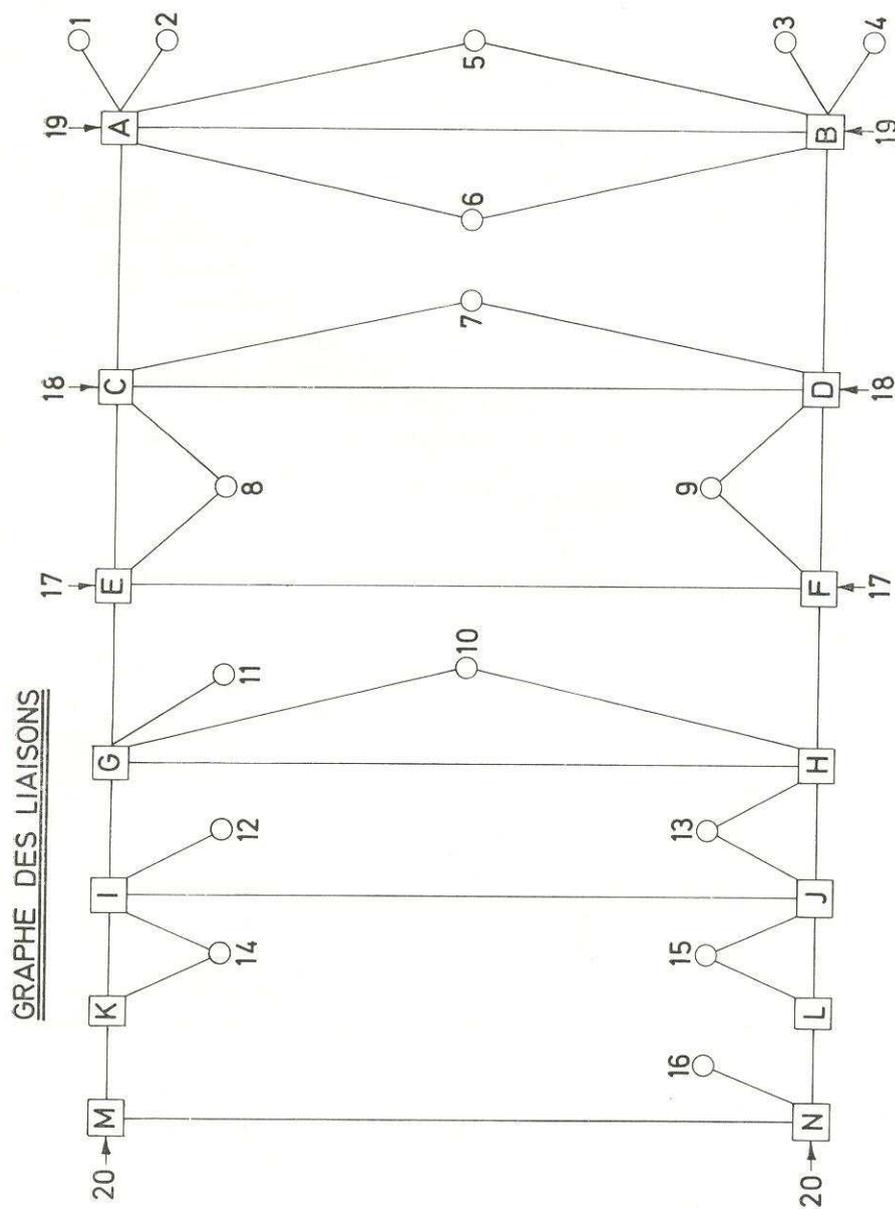


Fig. 7.

- f. Un procédé de simulation sera utilisé, en prenant comme base les distributions des lignes I à X de la Section précédente.
La liaison étudiée à la Section II sera, par convention appelée « liaison O ».

2. Les contraintes imposées par la réalité.

- a. La résolution du problème suppose :
- (1) la connaissance du graphe des liaisons ;
 - (2) la détermination des lois composites auxquelles obéissent les sources aléatoires ;
 - (3) la fixation des lois de refus aux sources fictives.
- b. Les lois de refus sont connues et ne présentent pas de difficultés.
- c. L'occupation d'une série de circuits entre deux correspondants est indépendante de l'identité des abonnés appelant. De plus toute station terminale peut entrer en liaison avec chacune des autres du graphe selon des règles expérimentales à déterminer. Les appels de chaque source obéissent néanmoins à des lois extraites de distributions aléatoires données.
- d. Nous pouvons, pour représenter la répartition spatiale des appels dans le réseau, établir une matrice carrée de dimension $n \times n$ ayant les caractéristiques ci-après :
- (1) sa diagonale principale est nulle $A_{ii} = 0$ (n équations) ;
 - (2) elle est symétrique $A_{ij} = A_{ji}$ [$\frac{n(n-1)}{2}$ équations] ;
 - (3) elle comporte n^2 éléments entre lesquels il y a $\frac{n(n+1)}{2}$ relations à satisfaire, correspondant aux équations des (1) et (2) ci-dessus.
- e. Par l'observation, nous constatons qu'il existe des relations préférentielles entre abonnés, mais que, en moyenne, pour une source donnée, le nombre des appels entrant et sortant tend à se concentrer autour d'une constante si la période T d'observation est assez longue, ce qui autorise à écrire n relations supplémentaires, à savoir :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} = \text{Constante}$$

Pour constituer la matrice, il faut expliciter le fait des relations préférentielles entre certains abonnés, en fonction des lois de distributions que nous connaissons par l'expérience. Considérons par exemple le nombre total d'appels C_i relatifs à une station i pendant le temps T ; si x_{ij} % de ces appels aboutissent à la station j , on peut écrire qu'il y correspond x_{ji} % du total des C_j appels de l'abonné j . On aura donc la relation :

$$x_{ij} C_i = x_{ji} C_j \quad (1),$$

qui est d'ailleurs une autre façon d'écrire la symétrie de la matrice. En lisant successivement tous les x_{ij} C_i , on possède la répartition des appels vers les autres stations du réseau.

g. En résumé, nous sommes en présence de n sources aléatoires soumises aux contraintes ci-après :

$$(1) \quad A_{ij} = A_{ji} \quad \text{et} \quad A_{ii} = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

A_{ij} = nombre d'appels de i vers j

Ces relations sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$

(2) Les répartitions des appels d'une station vers les autres donnent lieu aux relations suivantes, valables pour un temps T assez long pour atteindre le phénomène de régularité statistique :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} = C_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

soient n relations, imposées par les distributions aléatoires.

(3) La matrice des appels ayant n^2 éléments, il reste

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} \text{ degrés de liberté,}$$

qui mesurent les limites dans lesquelles on peut assurer les acheminements préférentiels des communications, en tenant compte de l'expérience.

3. Détermination de la matrice des appels (Fig. 9).

La figure 9 représente le réseau étudié. Le nombre de sources actives est de 20 et il y a 14 stations passives (de A à N). La durée d'observations T pendant laquelle le réseau sera simulé correspond au temps de passage de 4000 appels de la liaison 0.

Pendant cette période T, les nombres moyens d'appels sur les liaisons des types I à X correspondront au tableau ci-dessous :

Type de liaison	Moyenne des distributions statistiques Nbres appels/ 10 minutes	Nombres moyens d'appels sur T
0	10,54	4000
I	0,612	232
II	0,408	155
III	2,8	1068
IV	3,93	1500
V	0,87	330
VI	0,59	226
VII	1,7	646
VIII	1,14	432
IX	2,67	1019
X	1,75	665

En fait, ces nombres moyens d'appels sur la période T sont les constantes C que l'on avait introduit précédemment lorsqu'on avait imposé les lois de distribution aux « sources ».

Les liaisons types I et II ne seront pas utilisées, l'expérience ayant montré leur peu de vraisemblance pour le graphe de la figure 1. Les types de liaisons utilisés sont indiqués en bas de la figure 9.

4. Recherche d'une solution dans le cas où il n'y a pas de limitation sur les lignes inter.

- a. Si nous insérons un système de commutations automatiques dans le réseau, la réalisation d'une liaison entre deux abonnés se fera par un chemin non déterminable à priori, mais qui sera le plus court, trouvé libre, dans le temps. En formulant l'hypothèse du nombre de lignes inter non limité, à priori, nous introduisons comme conséquence directe d'avoir tous les chemins libres à tout moment. Pour fixer les idées, nous supposerons de plus

REPARTITION SPATIALE DU NOMBRE D'APPELS DANS LE RESEAU

DEPART ARRIVEE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	45	15	15	15	1350	15	15	30	7	8											
2	45	3%	1%	1%	33,75%	0,375%	2,3%	0,75%	2,25%	0,5%											
3	15	1%	1%	1%	33,75%	0,375%	4,6%	0,375%	2,25%	0,5%											
4	15	1%	1%	3%	0,375%	33,75%	2,3%	0,75%	2,25%	0,5%											
5	1350	90%	1%	1%	0,375%	33,75%	10%	20%	6%	1,4%								216			
6	15	1%	90%	90%	3,75%	65	10%	20%	6%	1,4%								216			
7	15	1%	2%	2%	1,6%	65	388	9,7%	1,5%	2%									50%		
8	30	15	30	15	800	800	388		220	300	67	67	67	67	67	350	349				
9	7	7	8	8	20	20	5	220	66,5%	10	5	3	3	3	3	3	3				
10	8	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,8%	7,5%	3%	75	75	150	150	150	150	82	83				
11								67	5	75	15	15	15	15	383	15	15				
12								67	3	150	15	106	171	13	13	900	171				
13								67	3	150	15	106	900	13	13	171	171				
14								67	3	150	15	171	900	13	13	171	171				
15								67	3	150	383	13	13	13	13	13	13				
16								67	3	150	15	900	171	171	13	13	13				
17								350	82	82	82	82	82	82	82	82	82				
18								349	83	83	83	83	83	83	83	83	83				
19					216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216				
20					5,4%	5,4%	5	300	7,5%	100	75	75	75	10	10	10	10				
Type de liaison	IV	IV	IV	IV	0	0	VII	0	V	IV	X	IV	IV	IV	X	IV	VIII	VIII	VIII	X	
Nombre d'appels total sur T	1500	1500	1500	1500	4000	4000	646	4000	330	1500	665	1500	1500	1500	665	1500	432	432	432	665	665

Période considérée : celle pendant laquelle on aura en moyenne 4.000 appels dans une liaison du type 0

Fig. 9.

TABLEAU VII (suite)

TABLEAU DES CHEMINS SUIVIS PAR LES APPELS
(suite)
LORS DES LIAISONS ENTRE STATIONS TERMINALES

Liaisons	Chemins suivis	Nombre lignes inter	Liaisons	Chemins suivis	Nombre lignes inter
7-9	7-D-9	0	11-12	11-G-I-12	1
7-10	7-D-F-H-10	2	11-13	11-G-H-13	1
7-11	7-C-E-G-11	2	11-14	11-G-I-14	1
7-12	7-C-E-G-I-12	3	11-15	11-G-I-J-15	2
7-13	7-D-F-H-13	2	11-16	11-G-I-J-L-N-16	4
7-14	7-C-E-G-I-14	3	11-17	11-G-E-17	1
7-15	7-D-F-H-J-15	3	11-18	11-G-E-C-18	2
7-16	7-D-F-H-J-L-N-16	5	11-19	11-G-E-C-A-19	3
7-17	7-C-E-17	1	11-20	11-G-I-K-M-20	3
7-18	7-D-18	0	12-13	12-I-J-13	1
7-19	7-D-B-19	1	12-14	12-I-14	0
7-20	7-C-E-G-I-K-M-20	5	12-15	12-I-J-15	1
8-9	8-C-D-9	1	12-16	12-I-K-M-N-16	3
8-10	8-E-G-10	1	12-17	12-I-G-E-17	2
8-11	8-E-G-11	1	12-18	12-I-G-E-C-18	3
8-12	8-E-G-I-12	2	12-19	12-I-G-E-C-A-19	4
8-13	8-E-G-H-13	2	12-20	12-I-K-M-20	2
8-14	8-E-G-I-14	2	13-14	13-J-I-14	1
8-15	8-E-G-I-J-15	3	13-15	13-J-15	0
8-16	8-E-G-I-J-L-N-16	5	13-16	13-J-L-N-16	2
8-17	8-E-17	0	13-17	13-H-F-17	1
8-18	8-C-18	0	13-18	13-H-F-D-18	2
8-19	8-C-A-19	1	13-19	13-H-F-D-B-19	3
8-20	8-E-G-I-K-M-20	4	13-20	13-J-L-N-20	2
9-10	9-F-H-10	1	14-15	14-I-J-15	1
9-11	9-E-E-G-11	2	14-16	14-K-M-N-16	2
9-12	9-F-H-G-I-12	3	14-17	14-I-G-E-17	2
9-13	9-F-H-13	1	14-18	14-I-G-E-C-18	3
9-14	9-F-H-J-I-14	3	14-19	14-I-G-E-C-A-19	4
9-15	9-F-H-J-15	2	14-20	14-K-M-20	1
9-16	9-F-H-J-L-N-16	4	15-16	15-L-N-16	1
9-17	9-F-17	0	15-17	15-J-H-F-17	2
9-18	9-D-18	0	15-18	15-J-H-F-D-18	3
9-19	9-D-B-19	1	15-19	15-J-H-F-D-B-19	4
9-20	9-F-H-J-L-N-20	4	15-20	15-L-N-20	1
10-11	10-G-11	0	16-17	16-N-L-J-H-F-17	4
10-12	10-G-I-12	1	16-18	16-N-L-J-H-F-D-18	5
10-13	10-H-13	0	16-19	16-E-L-J-H-F-D-B-19	6
10-14	10-G-I-14	1	16-20	16-N-20	0
10-15	10-H-J-15	1	17-18	17-F-D-18	1
10-16	10-H-J-L-N-16	3	17-19	17-E-C-A-19	2
10-17	10-H-F-17	1	17-20	17-F-H-J-L-N-20	4
10-18	10-G-E-C-18	2	18-19	18-C-A-19	1
10-19	10-N-F-D-B-19	3	18-20	18-D-F-H-J-L-N-20	5
10-20	10-G-I-K-M-20	3	19-20	19-A-C-E-G-I-K-M-20	6

que les chemins les plus courts dans le temps sont ceux qui passent par le minimum de stations passives. Si malgré cette seconde hypothèse plusieurs chemins sont encore possibles, le choix se fera arbitrairement.

- b. *Remarque* : Ces hypothèses constituent un point de départ de solution. Dans une seconde étape, nous changerons ces hypothèses et nous étudierons la sensibilité de la solution à ces modifications.
- c. Les chemins supposés suivis sont repris au tableau VII.
- d. *SCHEMA GENERAL DE RESOLUTION.*
 - (1) La limitation du nombre de positions de mémoires de l'ordinateur IBM 1620 ne permet pas de résoudre le problème en une seule étape. Nous scinderons donc la résolution en parties compatibles avec les possibilités de la machine.
 - (2) La période T sera parcourue par étapes ou « pas » Δt de dix minutes.
 - (3) Pour chaque étape de 10 minutes et pour chaque station terminale :
 - (i) nous tirons :
 - un nombre d'appels ;
 - au hasard, le temps de début t de chaque appel ;
 - une durée d'appel D que l'on associe à un début ;
 - le destinataire de l'appel d (éventuellement un refus) ;
 - (ii) pour chaque appel, nous imprimons t , D , d et nous perforons la carte correspondante.
 - (4) Après le nombre d'étapes voulues pour couvrir le temps T , nous possédons une carte par appel pour chaque station, qui fournit t , D , d ; de plus, nous comptons les appels dans chaque direction et le nombre total d'appels.
 - (5) Nous nous intéressons, dans une deuxième partie, à chacun des tronçons inter. Pour chacun d'eux, nous appelons tour à tour les communications et nous examinons si elles passent ou non par le tronçon inter soumis à l'étude. Dans l'affirmative, nous enregistrons le début et la durée. Nous répétons cette opération jusqu'à épuisement de toutes les communications de toutes les sources pendant T . Nous imprimons le nombre de voies utilisées, comme dans les chapitres précédents. Le tronçon suivant est appelé, et nous recommençons le processus indiqué ci-dessus, jusqu'à ce que nous ayons terminé l'examen de tous les tronçons inter.

5. Exploitation des résultats.

- a. Nous supposons les tronçons inter sans limitation. La simulation porte sur 4000 minutes.

- b. Les lignes inter du réseau constituent des voies d'acheminement des communications disposées de manière à présenter plusieurs chemins entre deux correspondants. Il ne faudrait pas limiter cette mesure de sécurité en réduisant le nombre de voies entre les stations. La probabilité de trouver un circuit libre doit être suffisamment élevée pour permettre la réalisation de toutes les liaisons avec une certitude pratique. La valeur de cette probabilité peut être fixée à 99 % par tronçon, à priori, sans tomber dans un excès d'optimisme.

Le tableau VIII, donne pour chaque tronçon, les probabilités d'occupation de 0, 1 ———— voies. La limitation du nombre de celles-ci est soulignée par un trait plein dans chaque colonne, et est obtenue en cumulant les probabilités à partir du bas et en s'arrêtant au dernier total inférieur ou égal à 1. On peut ainsi réduire le nombre de voies et exécuter à l'ordinateur des simulations en enregistrant les refus.

6. Etude de la sensibilité.

- a. Comment varie le nombre de lignes inter de chaque tronçon, si une ou plusieurs stations passives sont hors d'état de fonctionner ?
- b. Envisageons le non fonctionnement de la station C. Les liaisons AC, CD et CE sont donc supprimées et un nouveau routage doit être établi. Il figure au tableau IX, qui ne reprend plus les liaisons correspondant à une case blanche de la matrice (figure 8).
- c. Compte tenu des données modifiées, on procède à une simulation, comme indiqué au par. 4.d. (5).
- d. Le tableau X résume l'état du réseau, après destruction de la station C, en donnant les probabilités d'occupation des tronçons en %.
- Si nous acceptons un risque de 1 % de non réalisation d'une liaison par tronçon, on peut limiter le nombre de lignes inter entre stations passives comme il a été indiqué au tableau VIII et au paragraphe 5.
- La mise hors service de la station C n'affecte pratiquement que les tronçons AB, BD, DF, EF et HF, c'est-à-dire les chemins de contournement de C.
- e. Supposons une deuxième station hors service et poursuivons l'étude des modifications apportées au nombre de voies de chaque tronçon. Choisissons la station H et examinons, en premier lieu, les nouveaux chemins suivis par les appels compte tenu de cette hypothèse (Tableau XI). Nous procédons à une simulation à l'ordinateur et nous obtenons les résultats consignés dans le tableau XII sous réserve des hypothèses formulées au paragraphe précédent.

TABLEAU IX

TABLEAU DES CHEMINS SUIVIS PAR LES APPELS
LORS DES LIAISONS ENTRE STATIONS TERMINALES
STATION C DETRUITE

NE : Les liaisons omises
sont en fait, inutilisées

Liaisons	Chemins suivis	Nombres de lignes inter	Liaisons	Chemins suivis	Nombres de lignes inter
1-2	1-A-2	0	8-11	8-E-G-11	1
1-3	1-A-B-3	1	8-12	8-E-G-I-12	2
1-4	1-A-B-4	1	8-13	8-E-G-H-13	2
1-5	1-A-5	0	8-14	8-E-G-J-14	2
1-6	1-A-6	0	8-15	8-E-G-I-J-15	3
1-7	1-A-B-D-7	2	8-16	8-E-G-I-J-L-N-16	5
1-8	1-A-B-D-F-E-8	4	8-17	8-E-17	0
1-9	1-A-B-D-9	2	8-18	8-E-F-D-18	2
1-10	1-A-B-D-F-H-10	4	8-20	8-E-G-I-K-M-20	4
2-3	2-A-B-3	1	9-10	9-F-H-10	1
2-4	2-A-B-4	1	9-11	9-F-E-G-11	2
2-5	2-A-5	0	9-12	9-F-H-G-I-12	3
2-6	2-A-6	0	9-13	9-F-H-13	1
2-7	2-A-B-D-7	2	9-14	9-F-H-J-I-14	3
2-8	2-A-B-D-F-E-8	4	9-15	9-F-H-J-15	2
2-9	2-A-B-D-9	2	9-16	9-F-H-J-L-N-16	4
2-10	2-A-B-D-F-H-10	4	9-20	9-F-H-J-L-N-20	4
3-4	3-B-4	0	10-11	10-G-11	0
3-5	3-B-5	0	10-12	10-G-I-12	1
3-6	3-B-6	0	10-13	10-H-13	0
3-7	3-B-D-7	1	10-14	10-G-I-14	1
3-8	3-B-D-F-E-8	3	10-15	10-H-J-15	1
3-9	3-B-D-9	1	10-16	10-H-J-L-N-16	3
3-10	3-B-D-F-H-10	3	10-17	10-H-F-17	1
4-5	4-B-5	0	10-18	10-H-F-D-18	2
4-6	4-B-6	0	10-20	10-G-I-K-M-20	3
4-7	4-B-D-7	1	11-12	11-G-I-12	1
4-8	4-B-D-F-E-8	3	11-13	11-G-H-13	1
4-9	4-B-D-9	1	11-14	11-G-I-14	1
4-10	4-B-D-F-H-10	3	11-15	11-G-I-J-15	2
5-6	5-A-6	0	11-16	11-G-I-J-L-N-16	4
5-7	5-B-D-7	1	11-20	11-G-I-K-M-20	3
5-8	5-B-D-F-E-8	3	12-13	12-I-J-13	1
5-9	5-B-D-9	1	12-14	12-I-14	0
5-10	5-B-D-F-H-10	3	12-15	12-I-J-15	1
5-19	5-A-19	0	12-16	12-I-K-M-N-16	3
6-7	6-B-D-7	1	12-20	12-I-K-M-20	2
6-8	6-B-D-F-E-8	3	13-14	13-J-I-14	1
6-9	6-B-D-9	1	13-15	13-J-15	0
6-10	6-B-D-F-H-10	3	13-16	13-J-L-N-16	2
6-19	6-A-19	0	13-20	13-J-L-N-20	2
7-8	7-D-F-E-8	2	14-15	14-I-J-15	1
7-9	7-D-9	0	14-16	14-K-M-N-16	2
7-10	7-D-F-H-10	2	14-20	14-K-M-20	1
7-20	7-D-F-H-J-L-N-20	5	15-16	15-L-N-16	1
8-9	8-E-F-9	1	15-20	15-L-N-20	1
8-10	8-E-G-10	1			

TABLEAU XI

TABLEAU DES CHEMINS SUIVIS PAR LES APPELS
LORS DES LIAISONS ENTRE STATIONS TERMINALES

NB : Les liaisons omises
sont en fait, inutilisées

STATIONS C ET H DETRUITES
=====

Liaisons	Chemins suivis	Nombres de lignes inter	Liaisons	Chemins suivis	Nombres de lignes inter
1-2	1-A-2	0	8-12	8-E-G-I-12	2
1-3	1-A-B-3	1	8-13	8-E-G-I-J-13	3
1-4	1-A-B-4	1	8-14	8-E-G-I-14	2
1-5	1-A-5	0	8-15	8-E-G-I-J-15	3
1-6	1-A-6	0	8-16	8-E-G-I-J-L-N-16	5
1-7	1-A-B-D-7	2	8-17	8-E-17	0
1-8	1-A-B-D-F-E-8	4	8-18	8-E-F-D-18	2
1-9	1-A-B-D-9	2	8-20	8-E-G-I-K-M-20	4
1-10	1-A-B-D-F-E-G-10	5	9-10	9-F-E-G-10	2
2-3	2-A-B-3	1	9-11	9-F-E-G-11	2
2-4	2-A-B-4	1	9-12	9-F-E-G-I-12	3
2-5	2-A-5	0	9-13	9-F-E-G-I-J-13	4
2-6	2-A-6	0	9-14	9-F-E-G-I-14	3
2-7	2-A-B-D-7	2	9-15	9-F-E-G-I-5-15	4
2-8	2-A-B-D-F-E-8	4	9-16	9-F-E-G-I-J-L-N-16	6
2-9	2-A-B-D-9	2	9-20	9-F-E-G-I-K-M-20	5
2-10	2-A-B-D-F-E-G-10	5	10-11	10-G-11	0
3-4	3-B-4	0	10-12	10-G-I-12	1
3-5	3-B-5	0	10-13	10-G-I-J-13	2
3-6	3-B-6	0	10-14	10-G-I-14	1
3-7	3-B-D-7	1	10-15	10-G-I-J-15	2
3-8	3-B-D-F-E-8	3	10-16	10-G-I-J-L-N-16	4
3-9	3-B-D-9	1	10-17	10-G-E-17	1
3-10	3-B-D-F-E-G-10	4	10-18	10-G-E-F-D-18	3
4-5	4-B-5	0	10-20	10-G-I-K-M-20	3
4-6	4-B-6	0	11-12	11-G-I-12	1
4-7	4-B-D-7	1	11-13	11-G-I-J-13	2
4-8	4-B-D-F-E-8	3	11-14	11-G-I-14	1
4-9	4-B-D-9	1	11-15	11-G-I-J-15	2
4-10	4-B-D-F-E-G-10	4	11-16	11-G-I-J-L-N-16	4
5-6	5-A-6	0	11-20	11-G-I-K-M-20	3
5-7	5-B-D-7	1	12-13	12-I-J-13	1
5-8	5-B-D-F-E-8	3	12-14	12-I-14	0
5-9	5-B-D-9	1	12-15	12-I-J-15	1
5-10	5-B-D-F-E-G-10	4	12-16	12-I-K-M-N-16	3
5-19	5-A-19	0	12-20	12-I-K-M-20	2
6-7	6-B-D-7	1	13-14	13-J-I-14	1
6-8	6-B-D-F-E-8	3	13-15	13-J-15	0
6-9	6-B-D-9	1	13-16	13-J-L-N-16	2
6-10	6-B-D-F-E-G-10	4	13-20	13-J-L-N-20	2
6-19	6-A-19	0	14-15	14-I-J-15	1
7-8	7-D-F-E-8	2	14-16	14-K-M-N-16	2
7-9	7-D-9	0	14-20	14-K-M-20	1
7-10	7-D-F-E-G-10	3	15-16	15-L-N-16	1
7-20	7-D-F-E-G-I-K-M-20	6	15-20	15-L-N-20	1
8-9	8-E-F-9	1			
8-10	8-E-G-10	1			
8-11	8-E-G-11	1			

7. Regression.

L'ordinateur nous fournit les renseignements ci-après concernant la valeur de l'intensité de trafic

Tronçon	Intensité de trafic ψ		
	Toutes les stations en service	C hors service	C et H hors service
AB	0,054	0,159	0,159
AC	2,363	—	—
BD	0,282	2,65	2,65
CD	0,325	—	—
CE	0,111	—	—
DF	0,068	3,17	3,21
EF	—	3,27	3,50
GE	1,396	1,283	1,55
HF	0,154	0,265	—
GH	0,091	0,091	—
GI	1,667	1,66	2,21
JH	0,280	0,288	—
IJ	1,510	1,51	2,04
KI	1,424	1,42	1,425
MK	1,612	1,61	1,62
LJ	0,462	0,47	0,46
NL	0,495	0,502	0,493
MN	0,947	0,945	0,945

Si on veut représenter la variation du nombre de lignes en fonction de ψ on constate que les points représentatifs se placent sensiblement sur un arc de parabole d'équation :

$$y = 0,03 x^2 + 0,137 x - 0,115$$

ce qui nous donne un moyen simple de déterminer le nombre de voies connaissant l'intensité du trafic.