

## UN ALGORITHME D'ORIENTATION DECISIONNELLE APPLICATION DU CONCEPT D'ENTROPIE \*

J. FEDERWISCH  
SORCA, Bruxelles

---

### Introduction

#### *Position du problème.*

1. En gestion d'entreprise, la prise de décision est basée sur l'interprétation — souvent subjective — de conclusions prédictives quant à l'efficacité d'un système projeté.

L'étude de l'évolution aléatoire dans le temps d'un système quelconque est donc un préalable obligé.

Cette étude préalable, pour être opérationnelle, demande la définition en prémisses

- du phénomène fondamental en cause
- d'outils de mesure et de critères de sélection.

En fait, les processus stochastiques de décision constituent des réponses *discontinues* à l'évolution continue d'un hyperespace composé de l'entreprise elle-même et du « reste du monde », hyperespace se modifiant par les décisions elles-mêmes.

2. Toute décision de gestion d'entreprise conduit en définitive à la modification parfois de la structure mais toujours de la valeur de divers paramètres descriptifs ou explicatifs de la fonction de profit.

C'est dans cette orientation que sera présenté et structuré un algorithme d'orientation décisionnelle.

\* Conférence présentée à la tribune de la Société Royale Belge des Ingénieurs et Industriels « Colloque sur les applications modernes des Mathématiques », le 5 mai 1969.

*Observation préalable.*

- Dans le choix de toute décision, quelle qu'en soit la nature, on distingue
- un ensemble borné d'états de la nature  $E$ , dont certains traduisent l'apparition aléatoire de phénomènes influants auxquels peut être associée une loi de probabilité *objective*,
  - un ensemble borné enregistrant la connaissance que l'on a de cet ensemble  $E$ ; appelons-le-  $X$ .

Si la connaissance est parfaite, on a

$$X = E$$

Généralement cependant

$$X \neq E$$

car

- certains états probables  $e \in E$  sont omis dans  $X$
- certains états supportés  $x \in X$  ne sont pas compris dans  $E$ .

On notera que dans  $X$  peuvent figurer des lois de probabilités objectives, mais aussi des lois essentiellement subjectives, inconnues dans  $E$ .

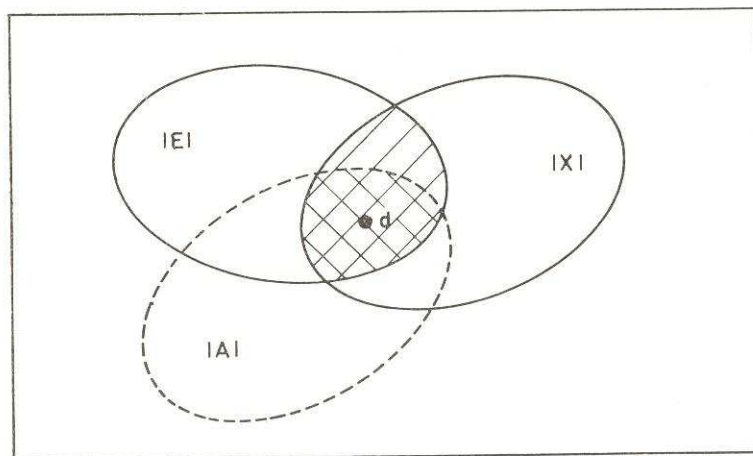


Fig. 1.

A.1667

Parallèlement aux ensembles  $E$  et  $X$ , l'organe de décision se trouve en présence d'un ensemble d'actions possibles

$$a \in A$$

au sein duquel il choisira la ligne d'action  $d$ , la *décision*, qui lui est la plus efficace.

On a donc successivement (cfr. fig. 1) :

$$X \cap E \rightarrow A$$

$$d = \max a$$

d'où, d'une manière globale,

$$X \cap E \rightarrow A \rightarrow \exists [d = \max a \subset \subset A]$$

Mais on doit remarquer qu'une partie des actions possibles, un sous-ensemble

$$A' \subset A$$

pourraient avoir, si elles étaient prises, une action directe sur E et modifieraient, par simple observation des faits, l'ensemble X

$$[(a \subset \subset A' \subset A) \in \Gamma E] \rightarrow X' \neq X$$

Concrètement et pratiquement, on constate en règle générale que l'on considère l'ensemble X comme étant stationnaire et stable et que l'on choisit uniquement

$$d = \max a \subset \subset A$$

Il est rare que l'on accepte de considérer l'information manquante, c'est-à-dire

$$E - X$$

comme partie intégrale de la décision.

### Le concept d'entropie appliqué à la stratégie des choix

*Principe fondamental.*

Partons de l'idée fondamentale suivante :

- la réponse à un problème donné (dans le cas présent, la recommandation d'une décision) est prise parmi ces ensembles A de réponses *a priori* qui pourraient être énumérées par la personne qui pose le problème;
- non seulement cette personne connaît cet ensemble, mais elle pourrait fixer une probabilité *a priori*  $p_i$  pour que telle réponse

$$a_i \subset A$$

de cet ensemble soit la bonne.

La théorie de l'information fournit une grandeur qui mesure l'incertitude *a priori* de celui qui pose le problème : c'est l'entropie  $H$  du problème posé.

Son expression est donnée par la relation

$$H(A) = - \sum_i p_i \log_2 p_i$$

Cette grandeur croît avec le volume des résultats possibles *a priori* : s'il y a  $N$  résultats possibles, elle atteint son maximum lorsqu'ils seront tous équiprobables et vaut :

$$H(A)_{\max} = - \log_2 \frac{1}{N} = + \log_2 N$$

Cette entropie s'annule si — et seulement si — tous les  $p_i$  à l'exception d'un seul (égal à l'unité) sont nuls

$$H(A)_{\min} = 0$$

caractérise donc le problème résolu.

#### Structure logique d'un arbre de décision.

Acceptons comme principe fondamental qu'un individu — ou un organe de décision — se trouve à tout moment devant le choix d'une ligne d'action qui n'hypothèque pas exagérément l'avenir, lui laissant une « masse de manœuvre » afin de pouvoir s'adopter au mieux aux événements susceptibles d'intervenir ultérieurement.

#### Stade initial.

1) Au stade initial (niveau 0), on se trouve ainsi en présence d'un ensemble de lignes d'actions possibles

$$a_{0i}$$

( $i$  variant entre 1 et  $n_0$ ) dans lequel un choix s'impose.

Ces lignes d'actions, définies en tenant compte de toutes les contraintes agissant sur l'organe de décision (par exemple la politique générale de l'entreprise, ses disponibilités financières directes et indirectes) sont toutes également possibles *a priori*.

Nous dirons que l'individu en l'organe de décision se trouve devant un ensemble  $A_0$  d'actions possibles caractérisées par une entropie initiale

$$H(A_0) = - \sum_{i=1}^{i=n_0} p_{0i} \log_2 p_{0i}$$

or, puisque toutes les actions sont équiprobables

$$H(A_0) = - n_0 \frac{1}{n_0} \log_2 \frac{1}{n_0} = \log_2 n_0$$

2) Si l'organe de décision choisit une ligne d'action

$$a_{0i} \subset \subset A_0$$

il sera soumis ultérieurement à un ensemble d'influences extérieures (à un ensemble d'états de la nature) dont il ignore le contenu et la structure.

Toutefois, en règle générale, cet avenir est aléatoire ou incertain. En tout état de cause, pendant une période temporelle future de durée déterminée (un an par exemple), on peut estimer que  $N_{0i}$  états de la nature  $e_{0i,k}$  sont susceptibles de se présenter; tous ces états de la nature *ne sont pas équiprobables*: chaque état de la nature peut être affecté d'une probabilité d'apparition  $p_{0i,k}$  qui est soit subjective, soit objective (selon notre état de connaissance).

En généralisant le concept d'entropie, nous pouvons caractériser chaque ligne d'action  $a_{0i}$  par une *entropie instantanée*

$$H'(a_{0i}) = - \sum_{k=1}^{k=N_{0i}} p_{0i,k} \log_2 p_{0i,k}$$

$$\text{avec } \sum_{k=1}^{k=N_{0i}} p_{0i,k} = 1$$

Analysant les « résultats » probables de la décision  $a_{0i}$ , l'organe de décision peut, par ailleurs, constater que si l'état de la nature  $e_{0i,k}$  apparaît, il enregistre un résultat (profit par exemple)  $P(a_{0i})_k$  et il évalue par conséquent une espérance mathématique de résultat

$$P(a_{0i}) = \sum_{k=1}^{k=N_{0i}} p_{0i,k} P(a_{0i})_k$$

3) L'organe de décision, devant le choix de  $n_0$  lignes d'actions possibles, serait tenté de décider une ligne d'action  $a_{0i}$  pour laquelle

- le résultat  $P(a_{0i})$  sera le plus élevé possible
- la variance  $\sigma^2(a_{0i})$  des résultats probables est la plus faible.



L'analyse de l'entropie initiale permet de compléter cette double notion : en effet, il importe de choisir une ligne d'action qui lui permette de s'adapter le plus aisément possible par des décisions conséquentes, à chaque état de la nature susceptible de se présenter. En conséquence, il s'intéressera à ce strict point de vue, à toute action lui laissant le plus de possibilités de contrôle ou d'observation, c'est-à-dire à toute action pour laquelle l'entropie initiale est la plus grande possible.

A ces critères s'en ajoute un autre : l'organe de décision s'intéressera à la ligne d'action pour laquelle, malgré tout,

— l'avenir est le moins incertain

et/ou

— les résultats espérés sont les plus élevés possibles.

Cette conjonction d'intérêts conduit à considérer la notion d'entropie efficace (ou entropie instantanée par unité de résultat)

$$b'(a_{0i}) = \frac{H'(a_{0i})}{P(a_{0i})}$$

Stades ultérieurs.

1) Après une première période temporelle (après la première année par exemple), l'organe de décision

— qui a choisi la ligne d'action  $a_{0i}$

— qui, de l'ensemble des états de la nature prévisibles, a constaté l'apparition de l'état  $e_{0i,k}$

se trouve à nouveau devant un choix décisionnel.

Compte tenu des contraintes agissant sur lui, il doit orienter son action suivant l'une des  $n_{1j}$  lignes nouvelles également probables  $a_{1j}$ ; cet ensemble peut être caractérisé par une entropie initiale

$$H(a_{0i}, a_{1j}) = \log_2 n_{1j}$$

Les états probables de la nature susceptibles d'intervenir lors de la deuxième période temporelle, lorsque la décision  $a_{1j}$  aura été prise, permet de caractériser cette décision

— par une entropie instantanée

$$H'(a_{0i}, a_{1j}) = - \sum_{k=1}^{k=N_{1j}} p_{1j,k} \log_2 p_{1j,k}$$

$$\text{avec } \sum_{k=1}^{k=N_{1j}} p_{1j,k} = 1$$

— par une espérance de profit

$$P(a_{1j}) = \sum_{k=1}^{k=N_{1j}} p_{1j,k} P(a_{1j})_k$$

— par une variance de profit

$$\sigma^2(a_{1j}) = \sum_{k=1}^{k=N_{1j}} p_{1j,k} P^2(a_{1j})_k - P^2(a_{1j})$$

— par une entropie efficace unitaire

$$b'(a_{1j}) = \frac{H'(a_{0i}, a_{1j})}{P(a_{1j})}$$

2) Un tel raisonnement peut être poursuivi séquentiellement.

En résumé, nous constatons que l'organe de décision se trouve devant la nécessité de lever

- une *indécision* quant au choix d'une ligne d'action, mesurée par l'entropie initiale,
- une *indétermination* quant à l'évolution du monde extérieur, mesurée par l'entropie efficace.

*Critères de choix d'une ligne d'action.*

Une proposition de choix initiale peut être caractérisée en fait par :

- un ensemble de choix séquentiels ultérieurs,
- un ensemble sélectif d'états de la nature

dont les conséquences peuvent être définies par :

- un ensemble sélectif de *résultats* ayant chacun une utilité opérationnelle spécifique, caractéristique de la politique générale de l'organe de décision;
- un ensemble d'entropies caractéristiques de l'indétermination existant *a priori* quant à la finalité du système.

En conclusion, *l'organe de décision doit rationnellement choisir la ligne d'action la plus profitable MAIS dans les limites où l'avenir est le moins hypothéqué, c'est-à-dire :*

- pour autant que *l'entropie initiale soit la plus grande possible* lui laissant la plus grande liberté de manœuvre,
- pour autant que *l'entropie efficace soit la plus faible possible* ou, en d'autres termes, que l'avenir soit le moins incertain et/ou les résultats espérés soient les plus élevés possibles.

\* \* \*