

## **FAMILLES DE GRAPHES D'INTERVALLES EMBOITES**

**Marc ROUBENS**

**Faculté Polytechnique de Mons  
rue De Houdain 9  
Belgium**

### **ABSTRACT**

We consider a family of nested interval graphs and define conditions for this family to be lower-homogeneous, i.e. to present at least one numerical representation by intervals of the real line with origins independant from the index level.

## 1. INTRODUCTION

Considérons sur une droite, une famille finie  $\{I(a), I(b), \dots\}$  d'intervalles.

On appelle *graphe d'intervalles* le graphe dont les sommets  $a, b, \dots$ , représentent les intervalles, deux sommets étant joints si et seulement si les intervalles correspondants s'intersectent. Si  $A = \{a, b, \dots\}$  et si  $I$  représente l'ensemble des arêtes, on note le graphe d'intervalles  $G(A, I)$ .

A une famille  $\{G_i(A, I_i), i=1, \dots, k\}$  de graphes d'intervalles correspondant des ensembles d'intervalles  $\{I_i(a), a \in A\}, i=1, \dots, k$ , de la droite tels que

$$(a, b) \in I_i \quad \text{ssi} \quad I_i(a) \cap I_i(b) \neq \emptyset$$

Chaque intervalle  $I_i(a)$  peut être défini par une origine  $g_i(a)$  et une longueur  $q_i(a)$  telles que  $I_i(a) = [g_i(a), g_i(a) + q_i(a)]$ . Dès lors :

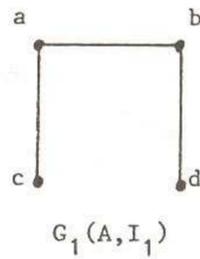
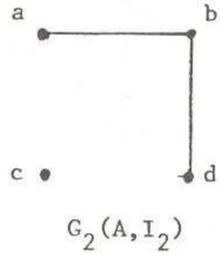
$$(a, b) \in I_i \leftrightarrow a I_i b \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} g_i(a) \leq g_i(b) + q_i(b) \\ g_i(b) \leq g_i(a) + q_i(a) \end{cases}$$

Une famille est composée de graphes d'intervalles  $G_i(A, I_i)$  emboîtés ssi  $I_1 \supseteq \dots \supseteq I_k$

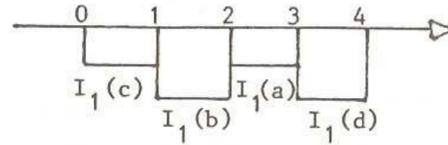
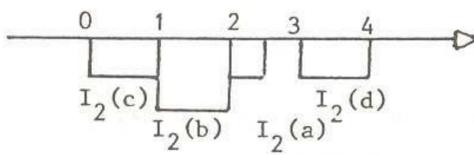
La famille des graphes d'intervalles emboîtés  $G_i(A, I_i), i=1, \dots, k$ , est dite *inférieurement homogène* (lower-homogeneous family of nested interval graphs) si l'ensemble  $\{I_i(a), i=1, \dots, k, \forall a \in A\}$  est tel que

$$g_i(a) = g(a) ; i=1, \dots, k, \text{ tout } a \in A$$

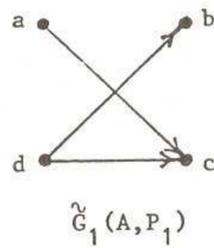
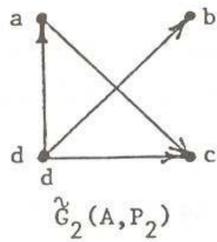
Comme premier exemple, considérons



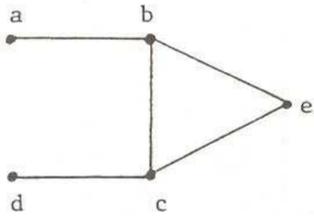
On peut obtenir deux représentations par des intervalles dont les origines sont identiques pour chaque sommet de A :



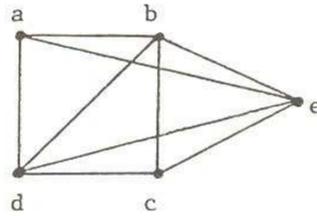
$\{G_i(A, I_i), i=1,2\}$  représente une famille inférieurement homogène de graphes d'intervalles emboîtés avec  $I_2 \subset I_1$ . A ces deux représentations par des intervalles on peut faire correspondre des orientations transitives des graphes complémentaires  $\tilde{G}_i(A, P_i)$  telles que  $a P_i b$  ssi  $x > y, \forall x \in I_i(a), \forall y \in I_i(b)$  et  $P_1 \subset P_2$



Un second exemple

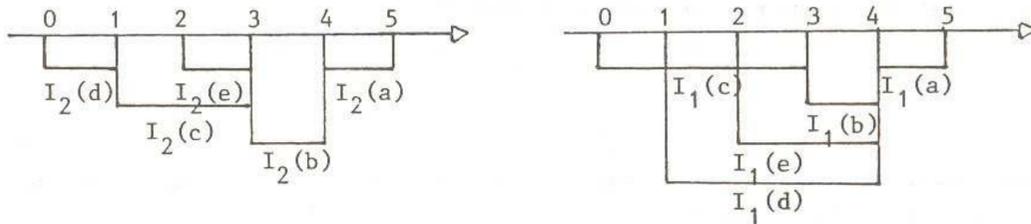


$G_2(A, I_2)$

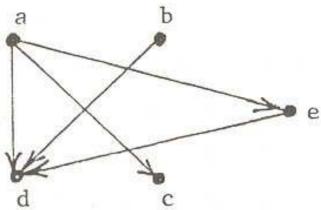


$G_1(A, I_1)$

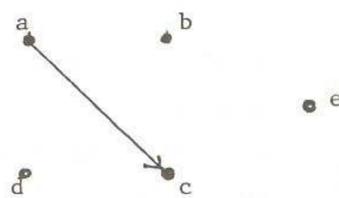
permet de constater qu'une bi-représentation par des intervalles est encore possible :



Des orientations transitives des graphes complémentaires  $\tilde{G}_i(A, P_i)$  correspondant aux représentations par des intervalles donnent



$\tilde{G}_2(A, P_2)$



$\tilde{G}_1(A, P_1)$

Ici on a encore  $P_2 \supset P_1$  mais la famille n'est pas inférieurement homogène ainsi qu'on le verra dans la suite car il est impossible d'obtenir une représentation de  $G_i(A, I_i)$  telle que  $g_i(a)=g(a)$ ,  $i=1,2$ .

Le théorème de Gilmore et Hoffman (1964) nous apprend qu'un graphe  $G(A, I)$  est un graphe d'intervalles si et seulement si  $G(A, I)$  est triangulé et son complémentaire  $\tilde{G}(A, I)$  est transitivement orientable.

Un graphe d'intervalles est appelé graphe d'indifférence si, en vertu d'un résultat de Roberts (1969), il n'existe aucun sous-graphe partiel du type  $K_{1,3}$  (graphe complet biparti avec deux sous-ensembles de sommets de cardinaux 1 et 3). La terminologie est malheureusement inadéquate puisqu'un graphe d'intervalles représente également les indifférences relatives à une structure sous-jacente de préférence du type "ordre d'intervalles".

Pour déterminer si un graphe  $G(A,I)$  est un graphe d'intervalles, on contrôle l'absence de cycle de longueur 4 sans corde par l'algorithme de Tarjan (1976) et on recherche les cliques maximales par l'algorithme décrit dans l'ouvrage de Golumbic (1980) et inspiré d'un résultat de Fulkerson et Gross (1965). Les cliques maximales doivent alors être orientées de manière que, lorsqu'un sommet apparaît dans plusieurs cliques maximales, celles-ci sont consécutives.

En se rappelant le résultat de Booth et Leuker (1976), ce problème se ramène à la recherche de matrices d'appartenance "cliques maximales-sommets" telles que chaque colonne indiquant (par 1) l'appartenance d'un sommet à une clique maximale présente une succession non interrompue de 1.

## 2. FAMILLE DE GRAPHES D'INTERVALLES EMBOITES INFÉRIEUREMENT HOMOGÈNE

ROUFENS et VINCKE (1984) ont introduit la notion de famille homogène en lignes d'ordres d'intervalles (row-homogeneous family of interval orders) : une famille d'ordres d'intervalles définis par les mises en ordre  $(O_{L,i}, O_{C,i}, i=1, \dots, k)$  des lignes et colonnes des matrices d'adjacence (cf. définition dans Jacquet-Lagrèze (1978)) est homogène en ses lignes ssi  $O_{L,i} = O_L, i=1, \dots, k$ .

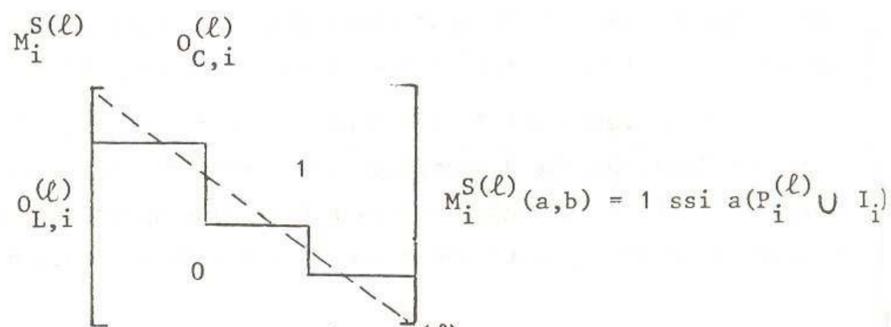
Ils ont montré que la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une représentation numérique d'une famille d'ordres intervalles  $(A, P_i, I_i)$  telle que

$$\begin{aligned} a P_i b &\leftrightarrow g(a) > g(b) + q_i(b) \\ a I_i b &\leftrightarrow \begin{cases} g(a) \leq g(b) + q_i(b) \\ g(b) \leq g(a) + q_i(a) \end{cases} \end{aligned}$$

avec  $I_{i-1} \supseteq I_i$ ,  $P_i \subseteq P_{i-1}$ ,  $0 \leq q_{i-1}(a) \leq q_i(a)$ ,  $a \in A$ ,  $i=2, \dots, k$

est que la famille emboîtée d'ordres d'intervalles soit homogène en ses lignes

Considérons une famille de graphes d'intervalles  $G_i(A, I_i)$ . Les orientations transitives  $\tilde{G}_i(A, P_i^{(\ell)})$ ,  $\ell=1, 2, 3, \dots$  (l'indice  $\ell$  correspond aux différentes orientations possibles), associées à cette famille conduisent à des représentations matricielles étagées d'ordres d'intervalles induites par les couples  $(\tilde{G}_i(A, P_i^{(\ell)}), G_i(A, I_i))$  telles que



Partant des orientations transitives  $\tilde{G}_i(A, P_i^{(\ell)})$  associées aux graphes d'intervalles  $G_i(A, I_i)$ ,  $i=1, \dots, k$ , on obtient les mises en ordre  $O_{L,i}^{(\ell)}$ .

Il en résulte la proposition suivante :

*Une famille de graphes d'intervalles emboîtés est inférieurement homogène si et seulement s'il existe des orientations transitives  $(\ell_1, \dots, \ell_k)$  telles que*

$$O_{L,1}^{(\ell_1)} = O_{L,2}^{(\ell_2)} = \dots = O_{L,k}^{(\ell_k)}$$

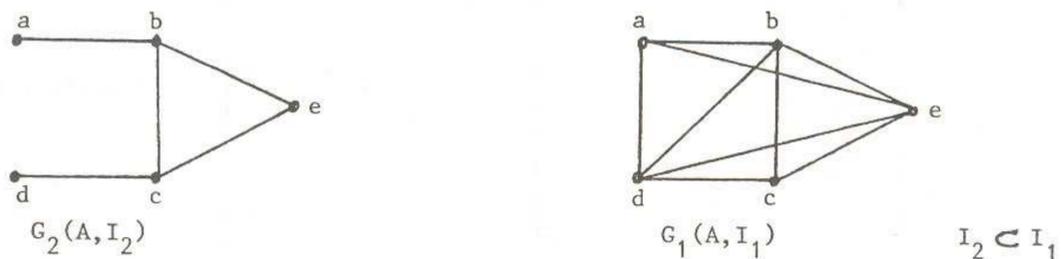
Il convient, afin d'obtenir des ordres totaux  $O_{L,i}$ ,  $O_{C,i}$ , de travailler dans l'ensemble  $A/E_i$  où  $E_i$  représente une relation d'équivalence telle que

$$a E_i b \quad \text{ssi} \quad a I_i c \leftrightarrow b I_i c, \quad \forall c \in A$$

. EXEMPLES

3.1. Exemple 1

Reconsidérons l'exemple décrit dans la section 1



Les cliques maximales de  $G_2(A, I_2)$  et  $G(A, I_1)$  sont respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^{(2)} = \{a, b\} \\ C_2^{(2)} = \{b, c, e\} \\ C_3^{(2)} = \{c, d\} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{(1)} = \{a, b, d, e\} \\ C_2^{(1)} = \{b, c, d, e\} \end{array} \right.$$

Les mises en ordre des cliques correspondant à des matrices d'appartenance présentant des 1 consécutifs en colonne sont

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^{(2)} > C_2^{(2)} > C_3^{(2)} \\ C_3^{(2)} > C_2^{(2)} > C_1^{(2)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{(1)} > C_2^{(1)} \\ C_2^{(1)} > C_1^{(1)} \end{array} \right.$$

et tels que :

$$\begin{array}{c} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \\ C_3^{(2)} \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

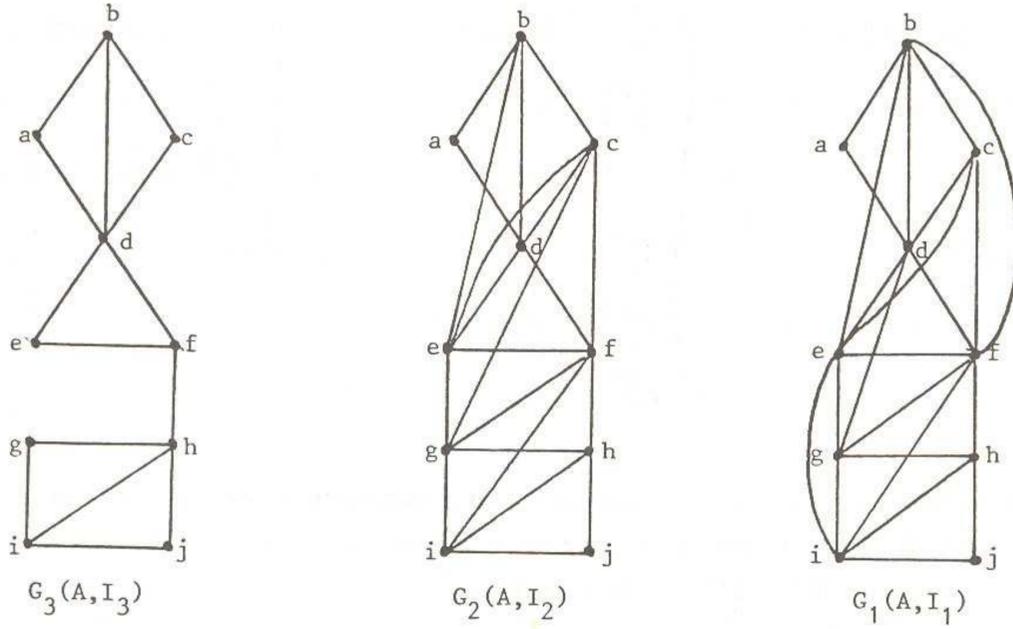
Il en découle les représentations matricielles (matrice d'adjacence) des ordres d'intervalles sous-jacents

$$\begin{array}{c}
 M_2^{S(1)} \quad a \quad b \quad e \quad c \quad d \\
 \begin{array}{c} a \\ b \\ e \\ c \\ d \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{array} \right] \\
 O_{L,2}^{(1)}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 M_2^{S(2)} \quad d \quad c \quad e \quad b \quad a \\
 \begin{array}{c} d \\ c \\ e \\ b \\ a \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right] \\
 O_{L,2}^{(2)} \quad \text{même matrice que } M_2^{S(1)}
 \end{array}$$
  

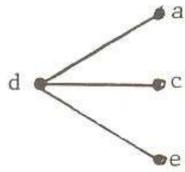
$$\begin{array}{c}
 M_1^{S(1)} \quad a \quad \overbrace{b \quad e \quad d}^{E_1} \quad c \\
 \begin{array}{c} a \\ \left. \begin{array}{c} b \\ e \\ d \end{array} \right\} \\ c \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{array} \right] \\
 O_{L,1}^{(1)}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 M_1^{S(2)} \quad c \quad \overbrace{e \quad d \quad b}^{E_1} \quad a \\
 \begin{array}{c} c \\ \left. \begin{array}{c} e \\ d \\ b \end{array} \right\} \\ a \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right] \\
 O_{L,1}^{(2)} \quad \text{même matrice que } M_1^{S(1)}
 \end{array}$$

Aucun des deux ordres  $(a > b > e > c > d)$ ,  $(d > c > e > b > a)$  n'est compatible avec les préordres  $(a > b > e > d > c)$ ,  $(c > d > e > b > a)$ ; la famille  $\{G_i(A, I_i)\}$  n'est pas inférieurement homogène. Notons que ni  $G_2(A, I_2)$ , ni  $G_1(A, I_1)$  ne comportent de sous-graphes partiels du type  $K_{1,3}$ . Dès lors, les ordres d'intervalles sous-jacents aux orientations transitives sont des quasi-ordres et les graphes d'intervalles sont des graphes d'indifférence.

3.2. Exemple 2



Aucun de ces trois graphes n'est un graphe d'indifférence car le sous-graphe partiel du type  $K_{1,3}$



est présent dans  $G_i(A, I_i)$ ,  $i=1,2,3$ .

Notons encore que dans  $G_2(A, I_2)$ ,  $(h,i)$  forme une classe d'équivalence - ils ont même comportement à l'égard de tous les autres sommets - et que  $(h,i)$  et  $(e,f)$  sont des classes d'équivalence de  $G_1(A, I_1)$ .

Les cliques maximales de  $G_3(A, I_3)$ ,  $G_2(A, I_2)$  et  $G_a(A, I_1)$  sont respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^{(3)} : \{a, b, d\} \\ C_2^{(3)} : \{b, c, d\} \\ C_3^{(3)} : \{d, e, f\} \\ C_4^{(3)} : \{f, h\} \\ C_5^{(3)} : \{g, h, i\} \\ C_6^{(3)} : \{h, i, j\} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{(2)} : \{a, b, d\} \\ C_2^{(2)} : \{b, c, d, e\} \\ C_3^{(2)} : \{c, d, e, f\} \\ C_4^{(2)} : \{d, e, f, g\} \\ C_5^{(2)} : \{f, g, h, i\} \\ C_6^{(2)} : \{h, i, j\} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{(1)} : \{a, b, d\} \\ C_2^{(1)} : \{b, c, d, e, f\} \\ C_3^{(1)} : \{d, e, f, g, h, i\} \\ C_4^{(1)} : \{h, i, j\} \end{array} \right.$$

Les mises en ordre des cliques correspondant à des matrices d'appartenance qui présentent des 1 consécutifs en colonnes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^{(3)} > C_2^{(3)} > C_3^{(3)} > C_4^{(3)} > C_5^{(3)} > C_6^{(3)} \\ C_2^{(3)} > C_1^{(3)} > C_3^{(3)} > C_4^{(3)} > C_5^{(3)} > C_6^{(3)} \\ C_1^{(3)} > C_2^{(3)} > C_3^{(3)} > C_4^{(3)} > C_6^{(3)} > C_5^{(3)} \\ C_2^{(3)} > C_1^{(3)} > C_3^{(3)} > C_4^{(3)} > C_6^{(3)} > C_5^{(3)} \end{array} \right.$$

ainsi que les classements inverses,

$$C_1^{(2)} > C_2^{(2)} > C_3^{(2)} > C_4^{(2)} > C_5^{(2)} > C_6^{(2)}$$

et le classement inverse,

$$C_1^{(1)} > C_2^{(1)} > C_3^{(1)} > C_4^{(1)}$$

et le classement inverse.

Il en découle les mises en ordre selon les lignes des différentes représentations matricielles étagées des ordres d'intervalles sous-jacents :

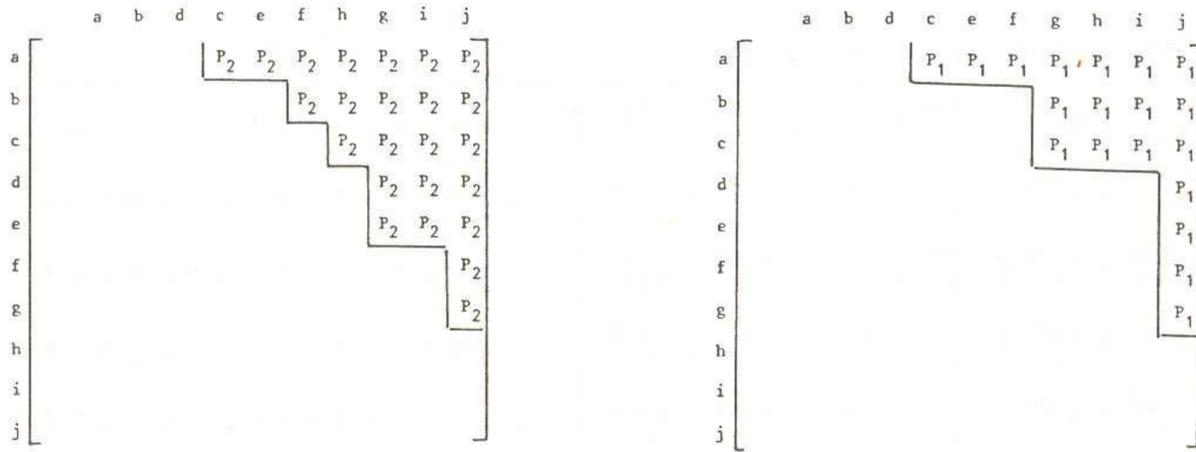
Mise en ordre des cliques maximales

$0_L$

$c_1^{(3)} > c_2^{(3)} > c_3^{(3)} > c_4^{(3)} > c_5^{(3)} > c_6^{(3)}$	$a > b > c > d > e > f > g > h > i$
$c_2^{(3)} > c_1^{(3)} > c_3^{(3)} > c_4^{(3)} > c_5^{(3)} > c_6^{(3)}$	$c > b > a > d > e > f > g > h > i$
$c_1^{(3)} > c_2^{(3)} > c_3^{(3)} > c_4^{(3)} > c_6^{(3)} > c_5^{(3)}$	$a > b > c > d > e > i > g > h > f$
$c_2^{(3)} > c_1^{(3)} > c_3^{(3)} > c_4^{(3)} > c_6^{(3)} > c_5^{(3)}$	$a > b > a > d > e > i > g > h > f$
$c_1^{(2)} > c_2^{(2)} > c_3^{(2)} > c_4^{(2)} > c_5^{(2)} > c_6^{(2)}$	$a > b > c > d > e > f > g > h \sim i > j$
$c_1^{(1)} > c_2^{(1)} > c_3^{(1)} > c_4^{(1)}$	$a > b > c > d > e \sim f > g > h \sim i > j$

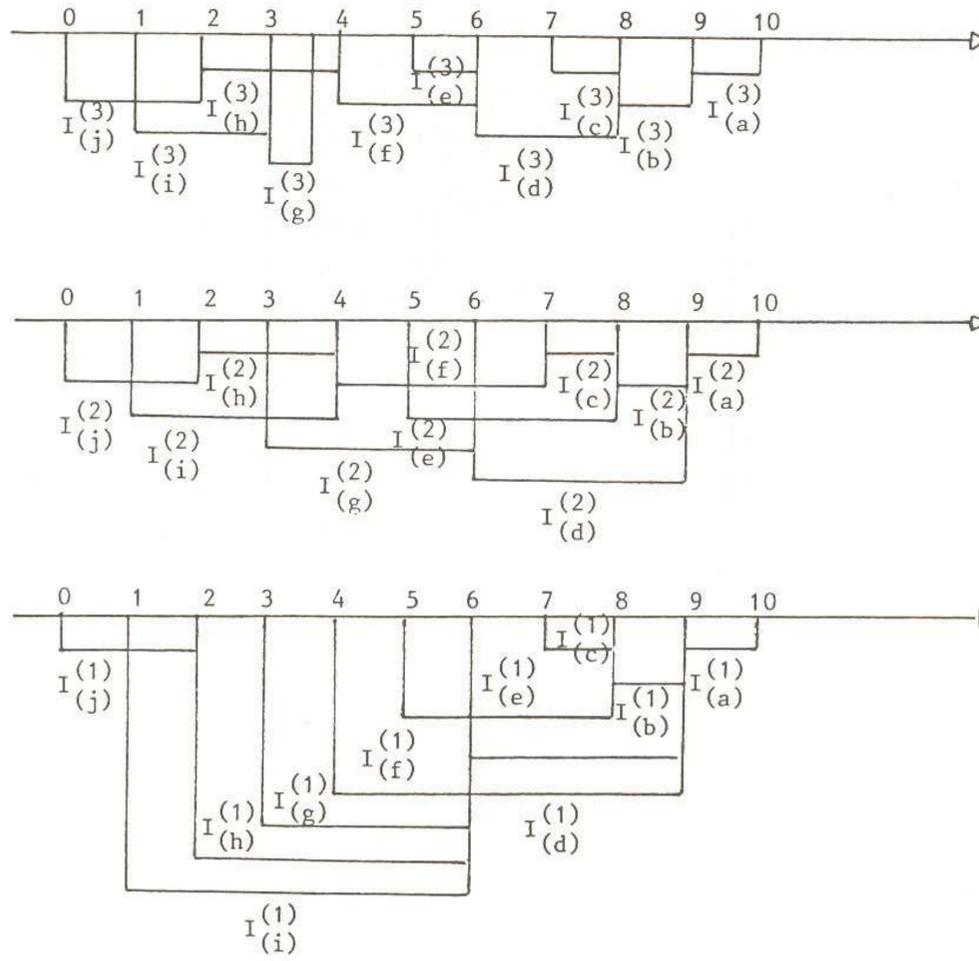
Les ordres  $\{a > b > c > d > e > f > g > h > i\}$  et  $\{i > h > g > f > e > d > c > b > a\}$  sont donc compatibles avec la famille  $\{G_i(A, I_i)\}$ . Le premier de ces deux ordres donne les représentations matricielles des ordres d'intervalles sous-jacents à  $\{G_i(A, I_i)\}$ .

	a	b	d	c	e	f	h	g	i	j
a				$P_3$						
b				$P_3$						
c				$P_3$						
d					$P_3$	$P_3$	$P_3$	$P_3$	$P_3$	$P_3$
e						$P_3$	$P_3$	$P_3$	$P_3$	$P_3$
f							$P_3$	$P_3$	$P_3$	$P_3$
g								$P_3$	$P_3$	$P_3$
h									$P_3$	$P_3$
i										$P_3$
j										



On constatera que les ordres  $O_C$  ne coïncident pas (ordres d'intervalles !).

Les représentations avec origines communes sont les suivantes :



#### 4. BIBLIOGRAPHIE

BOOTH K.S., LEUKER G.S.,  
Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity  
using PQ-tree algorithms,  
J. Comput. Syst. Sci. 13, 335-379 (1976).

FULKERSON D.R., GROSS O.A.  
Incidence matrices and interval graphs,  
Pacific J. Math. 15, 835-855 (1965).

GILMORE P.C., HOFFMAN A.J.  
A characterization of comparability graphs and of interval graphs,  
Candad. J. Math. 16, 539-548 (1964).

JACQUET-LAGREZE E.  
Représentation de quasi-ordres et de relations probabilistes transitives  
sous forme standard et méthodes d'approximation,  
Math. Sci. hum. 63, 5-24 (1978).

GOLUMBIC M.C.  
Algorithmic graph Theory and Perfect Graphs  
Academic Press, Inc. New York (1980).

ROBERTS F.S.,  
Indifference Graphs, in "Proof Techniques in Graph Theory" (F. Harary, ed.)  
pp.139-146, Academic Press, Inc. New York (1969).

ROUBENS M., VINCKE Ph.,  
On Families of Semiorders and interval Orders Imbedded in a Valued Structure  
of Preference : a survey,  
Information Sciences (1984).

TARJAN R.E.  
Maximum cardinality search and chordal graphs.  
Stanford Univ. Unpublished Lecture Notes CS 259 (1976).