

UN EXEMPLE DE PROBLEME DE GESTION EMPRUNTE A LA TELEPHONIE INTERURBAINE MANUELLE, DONT LA SOLUTION OPTIMUM EST DE COUT NUL

par P. DE MUNTER et J. GAUTHIER

§ 1. La recherche opérationnelle n'est pas seulement un ensemble de techniques mathématiques pour rendre plus efficiente l'activité technico-humaine, c'est surtout un état d'esprit, une disposition mentale à rechercher à rendre optimale cette activité, c'est-à-dire à augmenter son rendement pour un accroissement de coût minimal. Les exemples où l'accroissement de rendement peut s'obtenir pour un coût nul sont, à notre connaissance, suffisamment rares pour être signalés, surtout s'il se présente des solutions techniques tentantes mais coûteuses.

Le § 2 est consacré à la description du Central interurbain de la ville A ; il s'agit d'une installation ancienne, donc manuelle, située dans un pays en voie de développement. Le problème auquel est consacré cet article est né des plaintes des opératrices : elles prétendaient disposer de trop peu de lignes d'appel pour écouler le trafic vers la ville B. Or, s'il y a des crédits pour de nouvelles installations automatiques, il n'y en a pas ou peu pour améliorer, à fonds perdus, des installations périmées. Nous verrons que l'étude du trafic a suggéré une intervention dans la gestion du Central évitant toute dépense et conservant les normes. Le § 3 est consacré à la vérification des hypothèses qui sont à la base d'un modèle mathématique poissonnien pour le processus des appels et des cessations de conversation. La solution technique coûteuse au problème posé par les opératrices est décrite au § 4. L'étude du trafic est exposée aux §§ 5, 6 et 7 ; on en déduit une solution de coût nul décrite à la fin du § 7.

§ 2. Nous nous trouvons dans le Central interurbain de la ville A et nous nous intéressons à l'écoulement du trafic téléphonique de A vers la ville B.

Le Central n'étant pas automatique, pour écouler un appel interurbain émanant d'un abonné de A, une opératrice est amenée à rappeler l'abonné demandeur. L'appel et le rappel ont lieu au moyen de lignes d'appel interurbaines sur lesquelles l'opératrice numérote avec un clavier ou un cadran. Il y a 100 lignes d'appel de ce type. Elles sont groupées par lots de 10 lignes,

chaque lot étant associé à un orienteur. D'autre part, chaque ligne est reliée rigidement à un sélecteur interurbain; l'orienteur associé a pour objet d'orienter ce sélecteur d'après le premier chiffre envoyé par l'opératrice.

Lorsqu'un abonné de A, le 217803 par exemple, demande un abonné de B, l'opératrice prend note des numéros du demandeur et du demandé. Elle appelle ensuite le demandeur sur une ligne d'appel interurbaine dont elle s'empare en enfichant dans une ligne signalée disponible par un signal d'inoccupation qui s'allume devant elle.

Il est important de savoir que tout l'orienteur associé à la ligne prise par l'opératrice reste bloqué à la disposition de l'opératrice jusqu'à ce que le premier chiffre du numéro demandeur soit envoyé. Une fois le chiffre 2 envoyé, l'orienteur est libéré et une autre opératrice peut l'utiliser pour une autre communication.

En résumé, nous voyons donc que, pour obtenir un orienteur, l'opératrice doit pousser sur un bouton, une lampe s'allume qui correspond à une ligne associée à un orienteur et l'opératrice en enfichant bloque cet orienteur jusqu'à ce qu'elle ait envoyé le premier chiffre du numéro d'appel.

Nous appelons *durée d'orientation* tout le temps qu'une opératrice rend indisponible un orienteur. Normalement, une opératrice entraînée provoque des durées d'orientation de 3 sec. Mais il suffit de modifier l'ordre des opérations pour que la durée d'orientation atteigne 5, 10 ou même 20 sec. Par exemple, l'opératrice peut enficher dès qu'un appel survient, avant d'être certaine que l'abonné demandé puisse être atteint immédiatement, ou bien l'opératrice tarde à numéroter pour des raisons diverses (opératrice débutante, intervention sur une autre communication en cours, etc.).

Nous appellerons *trafic fictif* l'indisponibilité des lignes provenant du blocage des orienteurs pendant les durées d'orientation et *trafic-conversation* l'indisponibilité des lignes provenant de leur occupation par les conversations entre les abonnés des deux villes A et B. Le trafic-conversation est supporté uniquement par les circuits interurbains tandis que le trafic fictif est porté réellement par les lignes d'appel interurbaines et fictivement par les circuits.

§ 3. Les 100 lignes interurbaines ont été établies pour écouler tout le trafic sans attente. Un ampèremètre enregistreur du trafic écoulé indique que, pendant les heures chargées, 60 lignes sont occupées en moyenne. Cela signifie que si l'on observe un grand nombre de fois le nombre de lignes occupées par les conversations à un instant quelconque (pendant les heures chargées) la moyenne arithmétique de ces observations est 60. Il est à préciser que l'ampèremètre enregistre les durées d'occupation des lignes d'appel interurbaines par les conversations et leur préparation.

Le même ampèremètre enregistreur indique des pointes d'occupation de 80 lignes et, plus rarement, de 85 lignes.

L'étude statistique du processus stochastique constitué par les appels et les cessations de conversation a montré que les hypothèses poissonniennes sont satisfaites.

Par conséquent, le modèle mathématique qui convient pour représenter l'occupation des lignes par les conversations est celui décrit par W. Feller, dans « Probability Theory and its Applications », page 377 (J. Wiley, 1950). En effet, le trafic-conversation n'utilise jamais toutes les lignes; il est donc légitime de supposer qu'il y a une infinité de lignes à la disposition des opératrices.

Notons N la grandeur « nombre de lignes occupées par les conversations à un instant donné »; les valeurs possibles de N sont 0, 1, 2, ... et l'espérance mathématique de N est 60. D'après le modèle mathématique la probabilité pour que N prenne une valeur n est $e^{-60} [(60)^n/n!]$. En particulier, on trouve que la probabilité pour que N dépasse 80 est d'environ 0,005; autrement dit, sur 1000 observations aléatoires du trafic-conversation, 5 fois environ il y aura plus de 80 lignes occupées.

D'une manière générale, la validité du modèle mathématique est confirmée par les observations; en particulier, les observations des pointes de trafic. Le calcul (théorique) de la moyenne et de l'écart-type de la distribution asymptotique de la plus grande valeur d'un échantillon d'une centaine d'observations conduit aux résultats suivants. La moyenne vaut $60 + 2,5 \sqrt{60}$ ($\cong 80$) et l'écart-type vaut $(\pi/6) 0,375 \sqrt{60}$ ($\cong 4$). La plus grande valeur se trouve donc, avec une probabilité d'environ 0,95, dans l'intervalle (72, 88); c'est effectivement ce qui a été observé. (Les coefficients 2,5 et $(\pi/6) 0,375$ sont tirés de E.J. Gumbel, « Statistical Theory of Extreme Values », National Bureau of Standards, Washington D.C., 1954, p. 26).

§ 4. Nous venons de voir que le trafic-conversation occupe en moyenne 60 lignes sur 100 et qu'il atteint 80 à 85 lignes. Théoriquement, l'installation répond à l'exigence initiale d'un écoulement sans attente.

Or, les opératrices se plaignent assez fréquemment de manquer de lignes. Il n'est pas question de mettre en doute les plaintes des opératrices et par conséquent, il faut convenir que le trafic fictif qui vient de l'indisponibilité des orienteurs pendant les durées d'orientation et qui s'ajoute au trafic-conversation provoque le dépassement des disponibilités. Le trafic fictif qui vient de l'indisponibilité d'un orienteur pendant une durée d'orientation n'est observé par aucun appareil enregistreur.

Rappelons que chaque demande, qu'elle aboutisse ou non à une occupation « conversation », provoque à l'enfichage l'indisponibilité de 10 lignes. Pour diminuer cette occupation fictive, une solution technique simple s'impose immédiatement : au lieu d'associer les lignes par lots de 10 on les associera par lots de 5. Il suffit d'ajouter à l'installation 10 orienteurs ! Cette installation est techniquement simple; elle a le défaut d'être coûteuse.

D'autres solutions techniques peuvent être envisagées; par exemple le câblage de 8 lignes par orienteur. Cette solution, moins coûteuse que la précédente, est techniquement plus compliquée à réaliser. De toute manière, un fait s'impose : les crédits d'équipement ne permettent pas d'ajouter des orienteurs à l'installation actuelle. D'autre part, il faut se rendre à l'évidence que l'installation a été calculée pour écouler le trafic sans attente. Les plaintes des opératrices proviennent peut-être d'un défaut dans la gestion de l'installation ?

§ 5. Le modèle mathématique décrit au § 3 ne tient pas compte de l'existence d'un trafic fictif. Il est conçu pour une installation où les opératrices ont directement le contact avec les lignes, sans l'intervention intermédiaire des orienteurs.

Nous allons donc tenter de déterminer ce que nous conviendrons d'appeler le *trafic réel*, c'est-à-dire le nombre de lignes indisponibles en moyenne, l'indisponibilité du trafic-conversation et du trafic fictif.

Lorsqu'un appel survient, l'enfichage sur une ligne d'appel interurbaine rend indisponible à un autre appel pendant la durée d'orientation. Si un autre appel survenait *après* cette durée d'orientation et s'il n'en était jamais autrement, il n'y aurait pas lieu de s'intéresser au trafic fictif. Par contre, si plusieurs appels surviennent pendant la durée d'orientation, autant d'orienteurs sont rendus indisponibles. Il convient donc d'avoir à notre disposition le modèle mathématique qui représente les arrivées des appels. Plus précisément, ce qui nous intéresse est la probabilité d'occurrence d'un certain nombre d'appels pendant un certain intervalle de temps, la durée d'orientation.

Nous appellerons *appels simultanés* les appels qui surviennent pendant une durée d'orientation. Nous notons h la durée d'orientation et nous désignerons par I_h la grandeur (aléatoire) qui représente le nombre d'appels simultanés; les valeurs possibles de I_h sont $i_h = 0, 1, 2, \dots$. Pour obtenir la probabilité $P(I_h = i_h)$ il suffit de revenir au modèle décrit au § 3. En effet, N représente le nombre de lignes occupées lorsque le processus d'appels

et de cessations de conversations fonctionne. Dans ce cas, $P(N = n) = e^{-a} (a^n/n!)$ où a représente le nombre moyen de lignes occupées. Supposons maintenant qu'il n'y ait aucune cessation de conversations; dans ce cas, N représente le nombre d'appels pendant une durée b . Soit L le *taux des arrivées d'appels*, c'est-à-dire le nombre d'appels par seconde. En moyenne, il arrive donc $a = Lb$ appels pendant une durée b . Et par conséquent,

$$P(I_h = i_h) = e^{-Lh} \frac{(Lh)^{i_h}}{i_h!}$$

Il a été observé pendant les heures chargées un taux d'arrivées d'appels moyen égal à $1/4$; autrement dit, il arrive en moyenne 1 appel toutes les 4 secondes.

Les probabilités $P(I_h = i_h)$ ont été calculées pour les durées d'orientations 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 et reproduits au tableau I.

Nous avons également indiqué le nombre moyen s de fois que l'événement $I_h = i_h$ survient pendant l'heure :

$$s = \frac{3600}{b} P(I_h = i_h)$$

§ 6. On peut supposer que le trafic-conversation moyen se répartit uniformément parmi les orienteurs. Puisqu'il y a en moyenne 60 lignes occupées par les conversations, il y a donc 6 lignes occupées par les conversations sur chaque orienteur. Un appel rend donc fictivement indisponible 4 lignes en moyenne, pendant une durée d'orientation; I_h appels simultanés provoquent donc 4 I_h occupations fictives.

Or, nous avons vu au paragraphe précédent que l'espérance mathématique de I_h est $b/4$; par conséquent, le *trafic moyen fictif* est b . Le *trafic réel moyen* est donc $60 + b$.

Notons N_r la grandeur qui représente le trafic réel, et notons c le nombre de lignes disponibles (nous savons que $c = 100$, mais nous supposons actuellement ignorer cette information). Nous voulons déterminer c de telle sorte que l'événement aléatoire $N_r > c$ survienne avec une probabilité inférieure ou égale à 0,0025, seuil habituellement utilisé en téléphonie. Dans notre cas où il y a 900 appels par heure en moyenne, cela signifie que l'on admet l'attente 9 fois sur 4 heures.

Nous pouvons considérer en première approximation la variable N_r comme une variable de Poisson; par conséquent, la variance de N_r est

TABLEAU I. — Valeurs de $P (I_h = i_h)$ pour diverses valeurs de b .

b	3		4		5		6		7		8		9		10	
	P	s	P	s	P	s	P	s	P	s	P	s	P	s	P	s
4	63,2	7,5	153,3	14,7	290	21	470	28,2	684	35,15	900	40,5	1197	47	1330	47,88
5	10,4	1	30,7	2,7	63	4,4	140	8,4	240	12,33	360	16,2	540	21,6	660	23,76
6					12	1	30	1,8	70	3,6	120	5,4	202	8	270	9,72
7									17	0,9	30	1,35	70	2,8	90	3,24
8													21	0,8	30	1,08

N.B. P est exprimé en 10 millièmes.

$60 + b$. D'autre part, la moyenne $60 + b$ est suffisamment grande pour utiliser dans les calculs l'approximation normale de la distribution de Poisson. Par conséquent, l'événement $N_r > c$ est équivalent à

$$Z > \frac{c - 60 - b}{\sqrt{60 + b}}$$

où Z est une variable aléatoire normale de moyenne 0 et d'écart-type 1. Pour que la probabilité de l'événement soit inférieure ou égale à 0,0025, il faut que

$$\frac{c - 60 - b}{\sqrt{60 + b}} \geq 2,81, \quad \text{ou} \quad c \geq 2,81 \sqrt{60 + b} + 60 + b.$$

Nous avons reproduit au tableau ci-après les valeurs du second membre qui correspondent à $b = 0, 5, 8, 10, 15, 16, 21$.

b	0	5	8	10	15	16	21
$c \geq$	82	88	91	94	99	100	106

On constate donc que si les durées d'orientation ne dépassent pas 15 sec, l'installation satisfait aux exigences du trafic réel, dans la mesure où l'on admet, en ce qui concerne ce trafic, une attente éventuelle 9 fois au plus sur 4 heures.

L'attente tolérée est nettement insuffisante pour justifier la fréquence des plaintes des opératrices. D'autre part, s'il a été constaté que certaines opératrices provoquent des durées d'orientation supérieures à 15 sec, ce fait est trop rare pour justifier à lui seul le manque de lignes fréquemment observé par les opératrices.

§ 7. Nous en revenons à la solution préconisée au § 4, à savoir l'augmentation du nombre des orienteurs. En effet, nous venons de voir au § 6 que les 100 lignes de l'installation suffisent à écouler le trafic réel pour autant que l'on impose aux opératrices de ne jamais dépasser 15 sec pour les durées d'orientation. Or, cette dernière contrainte est facilement satisfaite, donc, s'il ne manque pas de lignes, c'est qu'il manque des orienteurs. La considération du trafic à un instant donné va pourtant nous permettre d'éviter l'augmentation du nombre des orienteurs par une intervention dans la gestion de l'installation.

Plaçons-nous à un instant donné et supposons qu'à cet instant il survient I_h appels simultanés. Cette occurrence provoque l'indisponibilité de I_h orienteurs et par conséquent de $10 I_h$ lignes. D'autre part, cette occurrence provoque l'occupation de I_h lignes par les conversations.

Le trafic engendré par les appels et les cessations de conversations provoque à cet instant $N - I_h$ occupations de lignes; mais il ne dispose pour s'écouler que de $100 - 10 I_h$ lignes. Il y aura donc attente à l'instant considéré si $N - I_h > 100 - 10 I_h$. Nous avons vérifié que le calcul de la probabilité de cet événement n'est pas entaché d'une erreur importante si l'on remplace N par sa moyenne 60. Par conséquent, il y a attente à l'instant considéré si $I_h > 40/9$, c'est-à-dire si $I_h \geq 5$. Le tableau du § 5 permet de calculer le nombre de fois que cet événement survient dans l'heure; voir tableau ci-après.

b	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombres de fois l'heure de $I_h \geq 5$	1	3	6	11	17	23	32	39

On constate donc que si le trafic moyen est écoulé sans attente alors même que les durées d'orientation atteignent 15 sec, le trafic instantané peut être encombré anormalement pour des durées d'orientation inférieures à 10".

Le calcul qui précède fournit une estimation trop forte du nombre de fois dans l'heure où l'attente peut survenir dans le trafic instantané. En effet, le trafic supporté par les orienteurs rendus indisponibles à l'instant t a été sous-estimé. En fait ce trafic peut être supérieur au nombre d'appels instantanés; mais son estimation est rendue difficile par l'absence d'informations quant à la distribution des appels parmi les orienteurs.

Remarquons d'autre part que dans tout ce qui précède les conséquences de l'indisponibilité due aux conversations et aux durées d'orientation ont été considérées du seul point de vue des lignes proprement dites, c'est-à-dire des lignes d'appel interurbaines pour appeler ou rappeler les abonnés de A. Considérons maintenant le trafic du seul point de vue des orienteurs.

Notons R le nombre d'orienteurs bloqués par le trafic moyen. Etant donné qu'il y a 1 appel toutes les 4 secondes, il y a $b/4$ appels pendant une durée b et l'espérance mathématique de R vaut donc $b/4$. Considérons la variable R comme une variable binomiale; les paramètres de sa distribution sont donc $(b/40, 10)$. Approximativement, on peut considérer R comme une

variable de Poisson de paramètre $b/4$. D'autre part, I_h est une variable de Poisson de paramètre $b/4$ également.

A un instant donné, supposons qu'il survient I_h appels instantanés. Ces appels rendent indisponibles I_h orienteurs. Cette indisponibilité instantanée s'ajoute à l'indisponibilité moyenne des orienteurs. Appelons Y l'indisponibilité totale $R + I_h$. La moyenne de Y est $b/2$. La variance de Y est la somme des variances et du double de la covariance. Or, nous avons, en notant E l'opérateur de moyenne,

$$E(R I_h) = E[R E(I_h/R)] = ER^2 = b/4 + b^2/16$$

où, il convient de le remarquer, nous avons sous-estimé $E(I_h/R)$ en ramenant le trafic instantané au trafic moyen. Par conséquent, la covariance vaut $b/4$ et la variance de Y vaut b .

Il y a attente à l'instant considéré si l'événement $Y \geq 10$ survient, ou bien si l'événement

$$Z = \frac{Y - b/2}{\sqrt{b}} \geq \frac{10 - b/2}{\sqrt{b}}$$

survient, où nous supposons que Z a une distribution approximativement normale $(0, 1)$.

On calcule aisément que si $b = 6$ l'événement $Y \geq 10$ survient environ 2 fois l'heure; si $b = 9$ il survient 14 fois l'heure et si $b = 16$ il survient 92 fois l'heure. Ces résultats sont, rappelons-le, des sous-estimations.

Il résulte de ce qui précède que 10 sec peut être considéré comme un seuil critique pour les durées d'orientation, lorsqu'il est tenu compte du trafic instantané, alors que le seuil critique est de 15 sec pour le trafic moyen.

L'accroissement du nombre des orienteurs a pu être évité par deux modifications dans la gestion du service, inspirées par les considérations qui précèdent. D'une part, l'application stricte de consignes quant aux durées d'orientation. D'autre part, la libération automatique des orienteurs si l'opératrice met plus de 10 sec à envoyer le premier numéro. Cette solution est de coût nul.