

DE PROBLEMATIEK VAN DE MATHEMATISCHE PROGRAMMERING

door F. VAN WINCKEL,
Katholieke Universiteit te Leuven

Inleiding

Vroeger beperkte de toepassing van de wiskunde zich in hoofdzaak tot natuur- en technische wetenschappen; de economie is daar sinds enkele decennia bijgekomen. In het begin van de dertiger jaren werd de Econometric Society opgericht wat de ontwikkeling van de econometrie, toen nog in haar kinderschoenen, ten goede kwam. Gedurende de laatste wereldoorlog werd de « operations research » geboren, toen men besloot de wetenschap te mobiliseren om de problemen van de oorlog op de meest doelmatige manier aan te pakken. Men bracht daartoe een groep van wetenschapsmensen bijeen, van wie een aantal na afloop van de oorlog de toen ontwikkelde technieken op bedrijfsproblemen ging toepassen. Succes bleef niet uit en bepaalde resultaten waren indrukwekkend.

Op deze wijze ontwikkelde het operationeel onderzoek zich tot de wetenschap welke zich bezig houdt met de mathematische zijde van de bedrijfs-economische en bedrijfsorganisatorische problematiek.

Vele methoden werden gedurende de laatste twintig jaar uitgewerkt en in toepassing gebracht. Alle zijn wiskundig georiënteerd.

Meestal leidt de toepassing ervan tot de opbouw van een mathematisch model, dat moet toelaten, binnen het raam van bepaalde hypothesen, voor het probleem een optimale oplossing te vinden.

Het is eerder moeilijk deze diverse methoden tot groepen te verenigen. Belangrijkst zijn wellicht de methoden van mathematische programmering waarvan in deze nota de problematiek nader zal worden toegelicht. Daarnaast zijn ook de bijzondere methoden van wiskundige analyse, die aanleiding gegeven hebben tot het ontstaan en de ontwikkeling van de wachtlijnentheorie, de voorraad- en vervangingstheorie zeer voornaam. De speltheorie en de methode van het kritieke pad of de PERT-planning houden weer andere methoden in welke in de laatste jaren tot belangrijke toepassingen hebben aanleiding gegeven.

1. Mathematische programmering in het algemeen

Een optimalisatieprobleem kan gedefinieerd worden als de maximatie of minimatie van een numerieke functie van één of meerdere variabelen of andere functies, waarbij deze variabelen of functies onafhankelijk zijn of gebonden door een stel van restricties. Mathematici, fisici en ingenieurs interesseren zich reeds lang aan dergelijke problemen. De toepassing van de differentiaal- en variatierekening tot het oplossen van sommige typen ervan gaat terug tot de achttiende eeuw. In de laatste twintig jaar echter constateert men een groeiende belangstelling voor een nieuwe groep van optimalisatieproblemen, gewoonlijk programmeringsproblemen genoemd, welke normaal niet oplosbaar zijn bij middel van de klassieke wiskundige methoden. Programmeringsproblemen houden meer verband met vraagstukken in de economie terwijl de andere optimalisatieproblemen gewoonlijk betrekking hebben op vraagstukken in de fysica. Zij hebben een grote belangstelling verworven, vooral in de domeinen van de bedrijfseconomie, de bedrijfsorganisatie en de theoretische economie. Men vindt ze daarenboven terug in belangrijke praktische problemen in handel en nijverheid.

In een programmeringsprobleem wordt getracht de aanwending van beperkte middelen te optimaliseren.

De structuur van het vraagstuk is als volgt. De onbekenden zijn de hoeveelheden van de verschillende middelen die men zal aanwenden. Zoals gebruikelijk in de wiskunde zal men deze onbekenden of variabelen met een symbool aanduiden, b.v. x ; in dit geval, indien men het aantal middelen voorstelt door n , met $x_1, \dots, x_n$.

Het doel, de optimale aanwending van de beschikbare middelen, komt mathematische neer op het zoeken van het optimum, maximum of minimum, van een functie van de variabelen $x_1, \dots, x_n$. Men schrijft

$$(\text{optimum}) z = f(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

Deze functie wordt doelstellingsfunctie of ook nog Z-functie genoemd. Naargelang deze functie moet worden gemaximeerd of geminimeerd spreekt men van een maximum- of minimumprobleem. De oplossing geeft een waarde aan de variabelen, waardoor een beslissing in het probleem wordt getroffen. Om die reden worden de variabelen beslissingsvariabelen geheten.

Vermits de middelen enigszins beperkt zijn zullen de variabelen gebonden zijn door een stel van m nevenwaarden, restricties geheten. Deze restricties

kunnen de wiskundige vorm aannemen van gelijkheden of ongelijkheden. Men kan ze dus aanduiden als :

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_1, \\ g_2(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_2, \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_m. \end{cases}$$

of, vereenvoudigd, nog als

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Het is duidelijk dat, door de aard van het probleem, de variabelen geen negatieve waarden mogen aannemen. Deze voorwaarden staan bekend als de niet-negativiteitsrestricties.

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Daarenboven kan het gebeuren dat nog andere beperkingen aan de variabelen worden opgelegd, b.v. dat deze alleen gehele waarden kunnen aannemen.

Een programmeringsprobleem kan op de volgende wijze geformuleerd worden. Gevraagd wordt de waarden van n variabelen $x_1, \dots, x_n$ te bepalen, welke niet negatief zijn, desgevallend bepaalde waarden niet aannemen, voldoen aan het stelsel van m restricties

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4)$$

en daarenboven de doelstellingsfunctie

$$z = f(x_1, \dots, x_n) \quad (5)$$

maximeren of minimiseren.

Men neemt aan dat de functies $g_i(x_1, \dots, x_n)$ en de constanten b_i , $i = 1, \dots, m$, alsmede de functie $f(x_1, \dots, x_n)$ gekend zijn. Eén der tekens $\{ \leq, =, \geq \}$ geldt voor elke restrictie maar mag verschillend zijn van de ene restrictie tot de volgende. De waarden van n en m zijn in beginsel willekeurig. Ook het geval $m = 0$ is reëel en komt overeen met een programmeringsprobleem waarbij geen restrictie zou optreden.

2. Lineaire programming

De methode van de lineaire programming is omwille van haar algemene theoretische ontwikkeling en uitgebreid praktisch toepassingsbied ongetwijfeld de belangrijkste mathematische programmeringsmethode. Het lineair

programmeringsprobleem kan bepaald worden als elk vraagstuk, waarbij de waarden van een aantal variabelen moeten worden bepaald, die niet negatief zijn, voldoen aan een stelsel van lineaire ongelijkheden of gelijkheden en een lineaire functie optimaal maken. Het is een speciaal geval van het algemene programmeringsprobleem waarin restricties en doelstellingsfuncties lineair zijn en de variabelen alle niet negatieve waarden mogen aannemen.

De restricties nemen volgende wiskundige vorm aan

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

terwijl de doelstellingsfunctie kan geschreven worden als

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (7)$$

De lineaire programmering deed haar intrede in de economische wetenschap als gevolg van de problematiek in verband met de optimale toewijzing van goederen.

Meer specifiek is de lineaire programmering gegroeid uit de werken van vooraanstaande economen en mathematici uit de dertiger jaren.

Een omvangrijk theoretisch model voor een economie in expansie werd ontwikkeld door Von Neumann, die steunde op bijdragen van Oostenrijkse en Duitse economen, die veralgemeningen van het evenwichtsmodel van Walras bestuderen. Een meer praktische approach vinden wij terug in de input-output modellen van Leontief. Dergelijke modellen vereisen weliswaar nog geen optimalisatie doch wel reeds het oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen.

Gedurende de laatste wereldoorlog werd een studiegroep onder de leiding van Marshall K. Wood belast met de behandeling van toewijzingsproblemen in opdracht van de Amerikaanse luchtmacht. Verschillende modellen van Leontief werden ontwikkeld en de oplossing van bepaalde problemen van lineaire programmering werd mogelijk gemaakt.

George B. Dantzig was een lid van deze studiegroep. Hij kwam tot de algemene formulering van lineaire programmeringsproblemen en ontwikkelde in 1947 de beroemde simplex-oplossingsmethode. Deze laatste werd algemeen bekend met de publicatie in 1951 van T.C. Koopmans' werk « Activity Analysis of Production and Allocation ». Belangrijke theoretische en praktische bijdragen verschenen na 1951 van de hand van G. Dantzig, D. Gale, H. Kuhn, A. Tucker, A. Charnes, W. Cooper en vele anderen.

Zoals reeds aangeduid, wordt bij het lineair programmeringsprobleem steeds aangenomen dat de variabelen op continue wijze variëren. Deze hypothese is aanvaardbaar indien de eenheden, waarop de variabelen betrekking hebben, willekeurig deelbaar zijn ofwel voldoende klein zijn in vergelijking met de beschouwde aantallen, zodat afronding tot de meest nabijgelegen gehele waarde voldoende benaderend is.

De simplex-methode is een algebraïsch numerieke iteratiemethode. Men gaat uit van een oplossing van het stelsel van restricties waarmee een zekere waarde van de doelstellingsfunctie overeenkomt. Deze oplossing wordt vervolgens in opeenvolgende stadia « verbeterd » tot wanneer de z -functie haar optimale waarde heeft bereikt. Dit aantal stadia is steeds eindig.

3. Niet-lineaire en dynamische programmering

Alle programmeringsproblemen, waarin op één of andere wijze aan de voorwaarden van het lineaire programmeringsvraagstuk niet voldaan is worden problemen van niet-lineaire programmering genoemd. In sommige gevallen tracht men dergelijke problemen op te lossen bij middel van een methode gelijkaardig aan de simplex-methode; in andere gevallen zijn specifieke oplossingsmethoden uitgewerkt. Het weze opgemerkt dat vele niet-lineaire programmeringsproblemen op het huidige ogenblik nog niet oplosbaar zijn. Zij zijn daarenboven altijd moeilijker te behandelen dan lineaire problemen en vergen steeds een merkkelijk aanzienlijkere computer-tijd.

Zonder volledigheid te betrachten zullen in het kort de belangrijkste typen van niet-lineaire programmeringsmethoden worden besproken.

Veel aandacht is in de laatste jaren besteed geworden aan problemen waarbij de restricties lineair zijn doch de doelstellingsfunctie een in beginsel willekeurige vorm mag aannemen. Dergelijke problemen kunnen als volgt geformuleerd worden

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \text{max. of min. } z = f(x_1, \dots, x_n). \quad (9)$$

Zij komen in de praktijk veel voor.

Dikwijls immers is het mogelijk restricties als lineaire betrekkingen te formuleren, terwijl zulks geenszins het geval is met een doelstellingsfunctie. Denk bijvoorbeeld aan de winstfunctie bij de studie van een productieproces

en u begrijpt onmiddellijk dat in het algemeen een lineaire uitdrukking in de produktiehoeveelheden onvoldoende benaderend zal zijn. Zulks zou immers betekenen dat de eenheidswinsten onafhankelijk zijn van de geproduceerde hoeveelheden of als dusdanig mogen worden beschouwd.

Niettegenstaande deze problemen nog vrij sterk aanleunen bij het lineaire programmeringsvraagstuk is de behandeling ervan meestal reeds vrij ingewikkeld. Twee bijzondere gevallen zijn grondiger bestudeerd geworden.

Indien de doelstellingsfunctie kan geschreven worden als een som van functies van één variabele

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n),$$

welke daarenboven aan zekere voorwaarden voldoen is het overeenkomstig probleem oplosbaar. Men zegt dat de variabelen van de doelstellingsfunctie scheidbaar zijn. Is het aantal restricties en variabelen niet te groot, dan mag als bijkomende beperking gesteld worden dat alle of sommige variabelen alleen discrete waarden mogen aannemen.

Het andere geval is dit, waarbij de doelstellingsfunctie kan uitgedrukt worden als de som van een lineaire- en een kwadratische vorm.

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + d_{11} x_1^2 + d_{12} x_1 x_2 + d_{1n} x_1 x_n + \dots + d_{nn} x_n^2 \quad (10)$$

of nog

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j \quad (11)$$

Dergelijke problemen zijn als problemen van kwadratische programmering bekend. Zij zijn, indien bijkomende voorwaarden aan de coëfficiënten d_{ij} worden opgelegd, oplosbaar. De hoeveelheid berekeningen echter, is vrij groot zodat zich vlug moeilijkheden in dit verband voordoen.

Problemen, waarbij in de restricties niet-lineaire betrekkingen voorkomen, vormen een zeer moeilijke groep. In de praktijk zijn zij van minder belang. Hun theoretische ontwikkeling is, met uitzondering van een belangrijk model van dat soort ontleend aan de organisatie in de petroleumindustrie, ook minder gevorderd.

Klassieke optimalisatieproblemen zijn diegene waarbij de restricties gelijkheden zijn. Zijn alle functies differentieerbaar, dan kunnen zij bij middel van de differentiaalrekening worden opgelost. Practische moeilijkheden doen zich echter voor indien het aantal variabelen groot wordt. Deze problemen komen alleen voor in de theoretische economie.

Een zekere uitbreiding is mogelijk door niet-negativiteitseisen aan de variabelen op te leggen en sommige ongelijkheden als restricties toe te laten. Methoden gebaseerd op de differentiaalrekening hebben, naast andere bezwaren, steeds het nadeel niet computerbaar te zijn. Zij moeten daarom eerder als theoretische analysemethoden beschouwd worden dan als praktische optimalisatie-technieken.

Een belangrijke groep van niet-lineaire programmeringsproblemen zijn diegene waarbij restricties en doelstellingsfunctie lineair zijn doch de variabelen alleen positieve gehele waarden kunnen aannemen. Men spreekt van lineaire programmering met gehele getallen. Dergelijke problemen zijn zeer belangrijk vermits bij vele studies in de praktijk de variabelen betrekking hebben op eenheden welke niet deelbaar zijn. Men ondervond vlug dat het niet mogelijk is deze problemen door lineaire programmering te benaderen door achteraf de bekomen resultaten tot de dichtst bijgelegen gehele waarde af te ronden. Daarom moesten speciale oplossingsmethoden worden uitgewerkt waarvan de revisie van Gomory, welke toelaat in vele gevallen deze problemen op te lossen, belangrijkst is. In de laatste jaren is de theoretische ontwikkeling van de programmering met gehele getallen zeer groot geweest.

Een bijzondere vermelding verdienen de programmeringsproblemen afgeleid van het lineair programmeringsmodel waarin sommige coëfficiënten stochastische waarden, d.w.z. waarden gekenmerkt door een waarschijnlijkheidsverdelingsfunctie, aannemen. In al deze problemen tot op het ogenblik bestudeerd, treden de stochastische coëfficiënten alleen in de doelstellingsfunctie op. Verschillende vraagstukken uit de praktijk zijn van dat soort gezien de te optimaliseren functie vaak betrekking heeft op variabelen waarvan de invloed op de waarde van de functie slechts in waarschijnlijkheid gekend is. De theoretische ontwikkeling van deze problemen is nog in haar beginstadium. Eens deze periode voorbij zal de stochastische lineaire programmering zeker aan belangstelling winnen.

Het is de lezer beslist opgevallen dat alle problemen van niet-lineaire programmering tot nu toe besproken, afgeleid zijn van het lineaire programmeringsmodel waaraan bepaalde wijzigingen worden aangebracht.

Een aparte plaats nemen de zogenaamde dynamische programmeringsproblemen in. Hun structuur is totaal verschillend van deze van het lineaire probleem en de oplossingsmethoden gelijken geenszins op deze van de simplexmethode. Om die reden wordt de dynamische programmering gewoonlijk niet bij de niet-lineaire programmering, waartoe zij logischerwijze behoort, gerekend.

In de beginne bedoelde men door de dynamische programmering elke programmering waarin de wijzigingen in de tijd belangrijk zijn en derhalve de tijdsvariabele expliciet optreedt.

Oplossingsmethoden hiervoor uitgewerkt gaan uit van het zogenaamde optimaliteitsprincipe van R. Bellman en maken gebruik van opvolgingsvergelijkingen. Het bleek echter vlug dat deze methoden een uitgebreider toepassingsgebied hebben dan wat oorspronkelijk dynamische programmering werd genoemd. De benaming is echter gebleven en tegenwoordig kan men de dynamische programmeringsproblemen definiëren als alle problemen waarbij bedoelde oplossingstechniek kan worden toegepast. De dynamische programmering is op het huidige ogenblik, na de lineaire programmering, de belangrijkste methode der wiskundige programmering.

De ontwikkeling van de niet-lineaire programmering is een logisch gevolg van deze der lineaire programmering. Aan gemoedigd door het succes van deze laatste ontstond spoedig belangstelling voor problemen welke niet aan het lineaire model beantwoorden. Een belangrijke publicatie van H. Kuhn en A. Tucker, getiteld «Nonlinear Programming», verscheen in 1951. Hierin werden de grondslagen van de niet-lineaire programmering voor een groot deel vastgelegd. Hun theorieën werden verder uitgewerkt in het boek «Studies in linear and nonlinear programming» van K. Arrow, L. Hurwicz en H. Uzawa, dat in 1958 verscheen.

In 1954 publiceerden A. Charnes en C. Lemke een benaderingsmethode welke toelaat problemen met lineaire restricties en scheidbare doelstellingsfunctie te behandelen. Een alternatieve formulering van dat probleem verscheen van G. Dantzig in 1956. Een belangrijke bijdrage met veel veralgemeningen hiervan, was het werk «Recent advances in mathematical programming» van C. Miller, R. Graves en P. Wolfe dat in 1963 het licht zag.

De eerste bijdragen met betrekking tot de kwadratische programmering verschenen in 1955. Belangrijk op dit gebied zijn de publicaties van E. Barankin en R. Dorfman, in 1956, van H. Houthakker in 1957 en van P. Wolfe in 1959. Vooral de zogenaamde simplex-methode voor kwadratische programmering van laatstgenoemde is als een mijlpaal op dit gebied te beschouwen.

Interesse in de lineaire programmering met gehele getallen ontstond in de vijftiger jaren met de publicaties van Dantzig en Fulkerson. Belangrijk zijn ook de bijdragen van Markovitz en Manne in 1957. Een systematische en computerbare methode voor deze problemen is die van R. Gomory welke einde 1960 werd gepubliceerd.

De ontwikkeling van de dynamische programmering is onafscheidbaar gebonden aan de naam van R. Bellman en zijn medewerkers welke reeds een duizendtal publicaties op dat gebied in de wereld stuurden. Te vermelden zijn de werken « Dynamic programming » van R. Bellman dat in 1957 verscheen, « Adaptive control processes » van dezelfde schrijver dat in 1962 verscheen en « Applied dynamic programming » van R. Bellman en S. Dreyfus dat in 1963 werd uitgegeven.

Besluit

De mathematische programmering, waarin men lineaire-, niet-lineaire- en dynamische programmering onderbrengt, heeft in de naoorlogse periode een indrukwekkende ontwikkeling gekend, welke op het huidige openblik onverminderd verder gaat.

Daarmee is gepaard gegaan een toegenomen belangstelling voor haar basisdisciplines, wiskunde, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek.

De navorsingsarbeid in vele domeinen der wiskunde, inzonderheid de lineaire algebra, de topologie en de graphen-theorie, in de laatste decennia, en voor een groot gedeelte in dienst van de mathematische programmering, is zeer belangrijk geweest. Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek hebben hun werkingsgebied uitgebreid en methoden verfijnd. Vooral te vermelden is de uitbouw van de theorie der testmethoden en der stochastische processen. Met hun beide vormen zij wellicht de belangrijkste vertakking van de toegepaste wiskunde.

Het oplossen van organisatieproblemen met behulp van de mathematische programmeringsmethoden maakt in vele gevallen de behandeling van een zeer uitgebreid cijfermateriaal noodzakelijk. De digitale computer komt de mathematicus hierbij ter hulp. Om die reden constateert men een haast parallelle ontwikkeling tussen de programmering als wiskundige methode en de bouw van de computer, waarbij men tracht deze methode zo algemeen mogelijk in toepassing te brengen.

Op deze wijze gaan theorie en praktijk hand in hand. Enerzijds levert de praktijk de problemen voor de theoreticus, welke op zijn beurt aan de practicus onderzoeksmethoden van zeer grote waarde verschaft.