REVUE BELGE DE STATISTIQUE ET DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

Vol. 8 - N° 1
SEPTEMBRE 1967

13 okt. 1967

BIBL. FACULT.
St-IGN.-ANTWERPEN

BELGISCH TIJDSCHRIFT VOOR STATISTIEK EN OPERATIONEEL ONDERZOEK

Vol. 8 - Nr 1
SEPTEMBER 1967

La « Revue Belge de Statistique et de Recherche Opérationnelle » est publiée avec l'appui du Ministère de l'Education nationale et de la Culture, par les Sociétés suivantes :

SOGESCI. — Société Belge pour l'Application des Méthodes scientifiques de Gestion.
Secrétariat : 66, rue de Neufchâtel, Bruxelles 6. Tél. 37.19.76.

S.B.S. — Société Belge de Statistique.
Siège social : 44, rue de Louvain, Bruxelles.
Secrétariat : 44, rue de Louvain, Bruxelles.

Comité de Direction

E. DE GRANDE, Docteur en Sciences, Theophiel Reynlaan, 53, Mortsel.

S. MORNARD, Licencié en Sciences, rue Souveraine, 51, Bruxelles 5.

R. SNEYERS, Docteur en Sciences, Météorologiste adjoint à l'Institut Royal Météorologique de Belgique, 68, rue Copernic, Bruxelles 18.

Comité de Screening

A. HEYVAERT, Ingénieur civil, 3, Val-Fleuri, Dilbeek.

R. SNEYERS, Docteur en Sciences, Météorologiste adjoint à l'Institut Royal Météorologique de Belgique, 68, rue Copernic, Bruxelles 18

Rédaction

R. SNEYERS, Docteur en Sciences, Météorologiste adjoint à l'Institut Royal Météorologique de Belgique, 68, rue Copernic, Bruxelles 18.

Secrétariat

J.H. LENTZEN, 66, rue de Neufchâtel, Bruxelles 6 - Tél. 37.19.76.

Het « Belgisch Tijdschrift voor Statistiek en Operationeel Onderzoek » wordt uitgegeven met de steun van het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur, door de volgende Verenigingen :

SOGESCI. — Belgische Vereniging voor Toepassing van Wetenschappelijke Methodes in het Bedrijfsbeheer.
Secretariaat : Neufchâtelstraat 66, Brussel 6. Tel. 37.19.76.

S.B.S. — Belgische Vereniging voor Statistiek.
Maatschappelijke zetel : 44, Leuvensestraat, Brussel.
Secretariaat : 44, Leuvensestraat, Brussel.

Directie Comité

E. DE GRANDE, Dr in de Wetenschappen, Theophiel Reynlaan, 53, Mortsel.

S. MORNARD, Lic. in de Wetenschappen, Souverainestraat, 51, Brussel 5.

R. SNEYERS, Dr in de Wetenschappen, Adjunct-Meteoroloog bij het Koninklijk Meteorologisch Instituut van België, Copernicusstraat, 68, Brussel 18.

Screening Comité

A. HEYVAERT, Burgerlijk Ingenieur, Bloemendal, 3, Dilbeek.

R. SNEYERS, Dr in de Wetenschappen, Adjunct-Meteoroloog bij het Koninklijk Meteorologisch Instituut van België, Copernicusstraat, 68, Brussel 18.

Redactie

R. SNEYERS, Dr in de Wetenschappen, Adjunct-Meteoroloog bij het Koninklijk Meteorologisch Instituut van België, Copernicusstraat, 68, Brussel 18.

Secretariaat

J.H. LENTZEN, 66 Neufchâtelstraat, Brussel 6 - Tel. 37.19.76.

REVUE BELGE DE STATISTIQUE
ET DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

VOL. 8 - N° 1 - SEPTEMBRE 1967 VOL. 8 - Nr 1 - SEPTEMBER 1967

SOMMAIRE — INHOUD

J. TORRENS-IBERN. — Les graphiques de contrôle par cumul d'observations à droites limites horizontales 3

P. DE MUNTER et J. GAUTHIER. — Un exemple de problème de gestion emprunté à la téléphonie interurbaine manuelle, dont la solution optimum est de coût nul 23

Nos échos — Allerlei 33

Announcement 35

BELGISCH TIJDSCHRIFT VOOR STATISTIEK
EN OPERATIONEEL ONDERZOEK

LES GRAPHIQUES DE CONTROLE PAR CUMUL D'OBSERVATIONS A DROITES LIMITES HORIZONTALES

par J. TORRENS-IBERN

Ecole technique supérieure d'Ingénieurs industriels, Barcelone

1. — Introduction.

Le large développement pris récemment par les graphiques de contrôle par cumul des observations a été provoqué par l'insuffisance d'efficacité des graphiques classiques, surtout dans leur application aux processus continus. En effet, ceux-ci ne sont pas tout à fait appropriés à cette sorte de fabrications.

Du point de vue théorique, il est évident que le contrôle par échantillons indépendants souffre d'un défaut fondamental, puisque si la base de la méthode consiste en ce qu'il y a continuité dans les résultats obtenus par l'échantillonnage successif et que les résultats actuels nous renseignent sur ce qui va se passer ensuite, de façon à nous prévenir des changements de la qualité aussitôt qu'ils se produisent, il n'est pas logique de ne pas conserver l'information qui reste des échantillons antérieurs et de ne pas en tenir compte dans la mesure du possible.

Ceci est le point théorique de départ des nouveaux graphiques.

2. — La mesure de l'efficacité du contrôle.

Les graphiques de contrôle, comme tout test statistique, admettent d'être caractérisés par des courbes d'efficacité. On peut représenter les risques d'erreur du réglage et du refus de réglage soit en fonction du déplacement de la valeur moyenne fabriquée, soit en fonction du pourcentage défectueux. C'est la façon classique de concevoir l'efficacité. Récemment, pour le contrôle en cours de fabrication, une autre mesure tend à s'imposer. La longueur moyenne des rafales (*average run length* = A.R.L.), appelée aussi délai moyen après déréglage :

$$L_\omega = \frac{1}{Q_\omega}$$

On peut démontrer facilement cette équation d'une façon analytique [1] mais aussi d'une façon directe, puisque lorsque dans une production on obtient un pourcentage ω de déchets et l'on sait que la probabilité de prélever un échantillon mauvais est Q_ω, il faudra, en moyenne, prélever $1/Q_\omega$ échantillons pour arriver à en trouver un de mauvais (fig. 1).

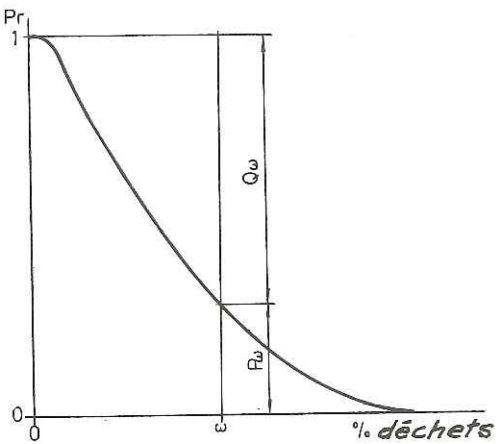

Fig. 1.

Les conditions d'efficacité appropriées pour un échantillonnage en cours de fabrication sont nettement différentes de celles employées couramment dans le contrôle à la réception. On sait que, pour celui-là, on admet très souvent $\alpha = 0{,}05$ pour la qualité acceptable (AQL) et $\beta = 0{,}10$ pour la qualité non acceptable (RQL). Ceux-ci donneraient comme longueurs moyennes de rafales :

$$L_A = \frac{1}{0{,}05} = 20 \qquad \text{et} \qquad L_R = \frac{1}{1 - 0{,}10} = 1{,}1$$

Les conditions optimales d'un plan d'échantillonnage en cours de fabrication sont, évidemment, une longueur de rafale moyenne très longue lorsque la qualité est bonne et une longueur de rafale très courte lorsque la qualité est mauvaise. Une longueur $L_A = 20$ est insuffisante. Par contre, on n'a pas besoin d'une longueur de rafale aussi courte que $L_R = 1{,}1$ si une légère augmentation entraîne une économie appréciable du contrôle. Le passage de $\beta = 0{,}10$ à $\beta = 0{,}5$, bien qu'il paraisse

être très important, se transforme du point de vue de la longueur moyenne des rafales en une augmentation à :

$$L_R = \frac{1}{1 - 0{,}5} = 2$$

c'est-à-dire que de $L_R = 1{,}1$ nous passons seulement à $L_R = 2$.

On peut encore considérer les différentes probabilités liées à chacune des longueurs de rafales. La probabilité de prélever N échantillons consécutifs lorsque le pourcentage défectueux est ω, de façon à ce que $N - 1$ soient des échantillons bons et le dernier mauvais, est :

$$p_\omega(N) = (1 - Q_\omega)^{N-1} Q_\omega$$

Si nous acceptons $Q_\omega = 0{,}5$

$$p_\omega(N) = 0{,}5^N$$

ce qui donne :

N	p_ω (N)
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625

La moitié des fois, on s'apercevra au premier échantillon du dérèglement de la fabrication et l'on ira très peu de fois au-delà du quatrième échantillon.

Ces remarques coïncident avec les propositions avancées par le groupe de statisticiens anglais (Page, Kemp, Ewan, etc.) qui ont commencé les premiers à employer les graphiques par cumul d'observations. En effet, ils indiquent 3 et 7 échantillons comme longueurs de rafale moyenne, appropriées pour la qualité non acceptable [2], ce qui est beaucoup plus que ce que nous proposons.

Par contre, d'autres statisticiens, Johnson et Leone, dans les articles qu'ils ont consacrés à la divulgation des méthodes de contrôle par observations accumulées [3] indiquent que β est négligeable pour simplifier les formules, ce qui est loin d'être vrai.

3. — Les graphiques de contrôle par cumul d'observations.

La base théorique des graphiques par cumul d'observations est la même que celle que Wald et son équipe de l'Université de Columbia ont développée, il y a vingt ans, sous le nom de « Sequential Analysis » [4].

Parmi les méthodes de contrôle à la réception qui résultent d'une telle théorie, rappelons celle qui concerne les moyennes d'un caractère mesurable. L'expression graphique de ce contrôle consiste en deux droites parallèles ascendantes sur un plan d'axes coordonnés N et Σx (fig. 2).

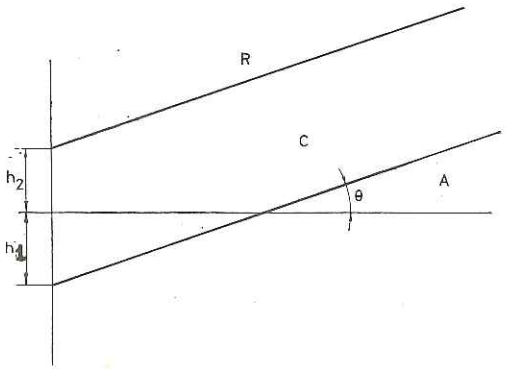

Fig. 2.

Si nous appelons m_A et m_R les moyennes qui correspondent aux qualités acceptable et refusable ($m_A < m_R$), on a :

$$h_1 = \frac{\sigma^2}{m_R - m_A} \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}$$

$$h_2 = \frac{\sigma^2}{m_R - m_A} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

$$s = \operatorname{tg} \theta = \frac{m_A + m_R}{2}$$

La première idée qui vient à l'esprit est de faire servir ces mêmes graphiques pour le contrôle en cours de fabrication.

Notons tout d'abord que la droite inférieure ne va pas nous servir puisque nous partons de l'hypothèse que l'on a réglé le processus préalablement et par conséquent nous admettrons cette hypothèse comme vraie jusqu'à ce que les échantillons prélevés nous démontrent le contraire.

Une première simplification du graphique pourrait être de considérer la variable centrée au lieu de la variable mesurée, de façon à ne pas avoir des ordonnées si grandes.

Cette solution est celle qui a été adoptée par la plupart des auteurs jusqu'à présent. L'impossibilité de savoir à quel moment commence la séquence avec réglage défectueux conduit à substituer les droites dessinées sur le papier par un masque équivalent, que l'on place, inversé, en s'appuyant sur le point de la dernière observation, somme accumulée des antérieures [3].

En dehors de cas très particuliers, cette solution n'est pas une bonne solution pour un atelier. On a parlé de l'efficacité réelle ou pratique par opposition à l'efficacité théorique d'une méthode de contrôle considérant les difficultés que présente son application industrielle, puisque c'est seulement le résultat final qui importe. On peut donc beaucoup douter de l'efficacité réelle des graphiques avec masque à droites divergentes, même si l'efficacité théorique est supérieure à celle des graphiques classiques.

La seule solution que je crois acceptable est celle qui repose sur la conception de droites limites parallèles horizontales de façon semblable aux graphiques de contrôle classiques. Pour cela, il suffit de faire un changement des variables qui donne lieu à ce que :

$$s = \operatorname{tg} \theta = 0 .$$

Ceci est obtenu simplement en prenant comme origine ou *valeur de référence :*

$$m_0 = \frac{m_A + m_R}{2}$$

4. — Efficacité comparée des graphiques par cumul d'observations et des graphiques classiques.

La théorie de l'analyse séquentielle de Wald donne aussi le moyen de déterminer la taille des échantillons nécessaires pour des conditions d'efficacité données et nous donne le moyen de comparer les nouveaux graphiques avec les anciens.

Le nombre moyen de prélèvements pour le contrôle séquentiel est fonction de la qualité des lots. Pour la qualité RQL, liée au risque β de ne pas être décelée, le nombre moyen des prélèvements est :

$$\bar{n}_{mR} = 2 \frac{(1 - \beta) \ln \dfrac{1 - \beta}{\alpha} - \beta \ln \dfrac{1 - \alpha}{\beta}}{(m_R - m_A)^2} \sigma^2$$

Si l'on désirait pouvoir prendre une décision en une seule fois, lorsque la qualité est refusable, il faudrait donc prélever des échantillons de $\bar{n}_{mR}$ pièces ;

ainsi, en moyenne, on aurait la possibilité de refuser (ou d'accepter) le lot à chaque prélèvement.

C'est ce qui nous intéresse; il suffira de prendre des échantillons de taille n_{mR} pour que, si la qualité est caractérisée par une moyenne m_R, nous puissions prendre une décision appropriée par échantillon en moyenne. A noter que cela ne veut pas dire refuser le réglage chaque fois, mais refuser $1 - \beta$ fois et accepter β; autrement dit, avoir des longueurs moyennes de rafale :

$$L_R = \frac{1}{1 - \beta}$$

Ceci montre la différence qu'il y a entre la longueur moyenne des rafales et le nombre moyen de prélèvements.

Il est intéressant de comparer la taille des échantillons nécessaires pour des conditions d'efficacité α et β données d'après la formule antérieure et la taille nécessaire avec les graphiques classiques de Shewart aux mêmes conditions d'efficacité.

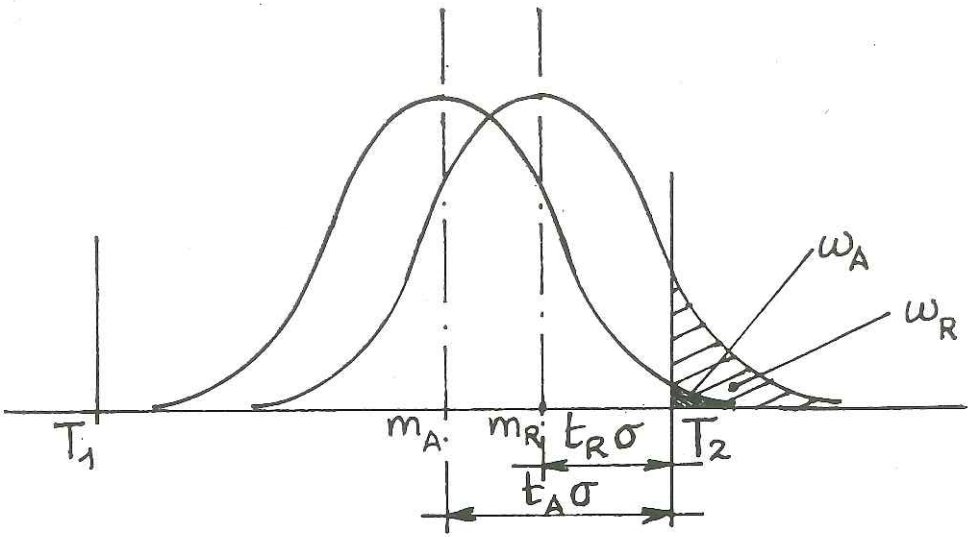

Fig. 3.

Soit une fabrication de pièces mécaniques avec les tolérances $T_1 - T_2$ et supposons que le processus est trop précis pour ce travail. Les qualités AQL et RQL sont caractérisées par des pourcentages de déchets ω_A et ω_R respectivement, ce qui correspond à des distances de T_2 au centre de fabrication $t_A\,\sigma$ et $t_R\,\sigma$.

Le calcul classique de la taille de l'échantillon, pour des risques α et β, d'après Cavé, donne [5] :

$$n_s = \left(\frac{t_\alpha - t_\beta}{t_A - t_R}\right)^2$$

Par contre, la formule antérieure donne :

$$n_T = \frac{2\left[(1-\beta)\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha} - \beta\ln\dfrac{1-\alpha}{\beta}\right]}{\left(\dfrac{m_R - m_A}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{2\left[(1-\beta)\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha} - \beta\ln\dfrac{1-\alpha}{\beta}\right]}{(t_A - t_R)^2}$$

Le rapport entre les deux tailles est :

$$\frac{n_s}{n_T} = \frac{(t_\alpha - t_\beta)^2}{2\left[(1-\beta)\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha} - \beta\ln\dfrac{1-\alpha}{\beta}\right]}$$

Ce rapport est supérieur à 1,50 pour toutes les valeurs possibles de α et β. Sa plus petite valeur est 1,52 pour $\alpha = 0{,}001$ et $\beta = 0{,}23$; il vaut 1,74 pour les risques $\alpha = 0{,}001$ et $\beta = 0{,}5$ que nous considérons comme les plus raisonnables. Les figures 4 et 5 montrent pour $\alpha = 0{,}001$, 0,01 et 0,1 l'évolution du rapport en fonction de β et de la longueur L_R.

5. — Calcul et tracé des droites limites.

Le prélèvement des échantillons de n unités réduit la valeur de la variance qui intervient dans le calcul des ordonnées à l'origine des droites limites. A la place de σ^2, variance de la fabrication, il faut mettre $\sigma_m{}^2 = \sigma^2/n$, variance des moyennes des échantillons, et par conséquent :

$$h_2 = \frac{\sigma_m{}^2}{m_R - m_A}\ln\frac{1-\beta}{\alpha} = \frac{\sigma^2}{n(m_R - m_A)}\ln\frac{L_A}{L_R}$$

où l'on a remplacé aussi les valeurs de $1 - \beta$ et α par leurs équivalents $1/L_R$ et $1/L_A$.

Cette formule est valable pour les droites limites de contrôle quelles que soient les valeurs des risques et des longueurs moyennes des rafales choisies. Selon ceux que l'on prendra, on aura les limites de contrôle ou de surveillance. La signification différente de ces droites par rapport aux graphiques classiques conseille de choisir pour les limites de surveillance un risque d'erreur α plus petit, 0,01 au lieu de 0,025.

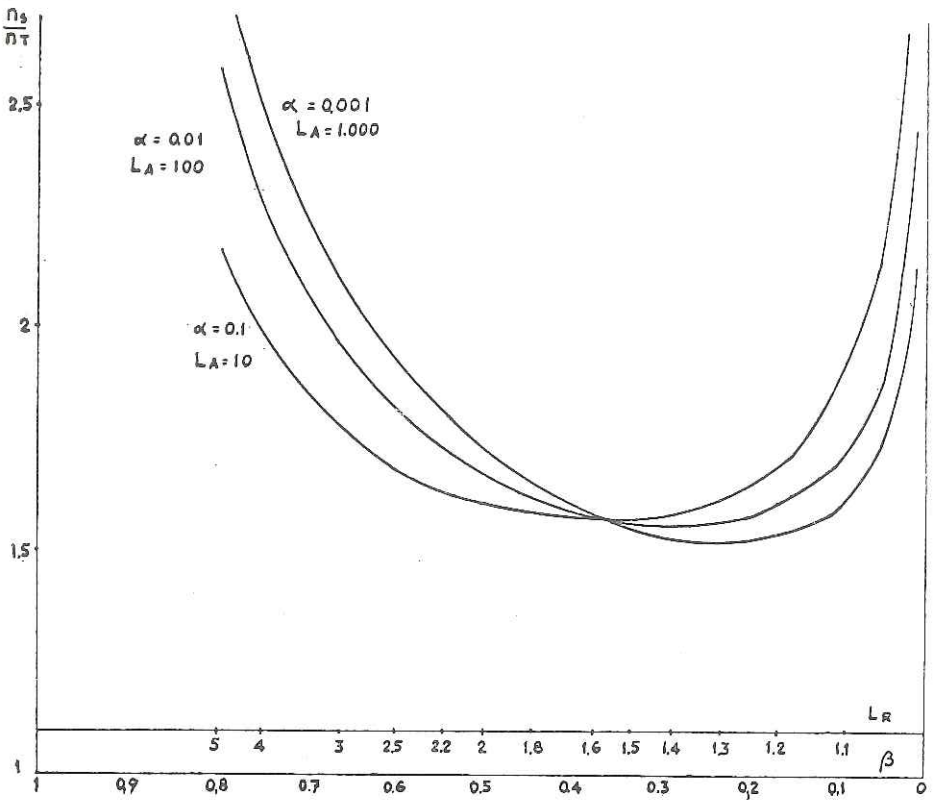

Fig. 4.

En effet, l'apparition d'un point au-delà de cette limite entraîne aussi la répétition du prélèvement, mais si le second point se trouve à côté du premier, les probabilités respectives ne doivent pas être multipliées parce que ce second point n'est pas indépendant du premier et il résume à lui seul toute l'information des échantillons observés.

L'application à la formule antérieure des deux valeurs 0,001 et 0,01 pour α, en conservant pour β la valeur 0,5, donne les deux droites de contrôle et de surveillance :

$$h_c = \frac{\sigma^2}{n\,(m_R - m_A)} \ln \frac{1.000}{2} = 6{,}215\,\frac{\sigma^2}{n\,(m_R - m_A)}$$

$$h_s = \frac{\sigma^2}{n\,(m_R - m_A)} \ln \frac{100}{2} = 3{,}912\,\frac{\sigma^2}{n\,(m_R - m_A)}$$

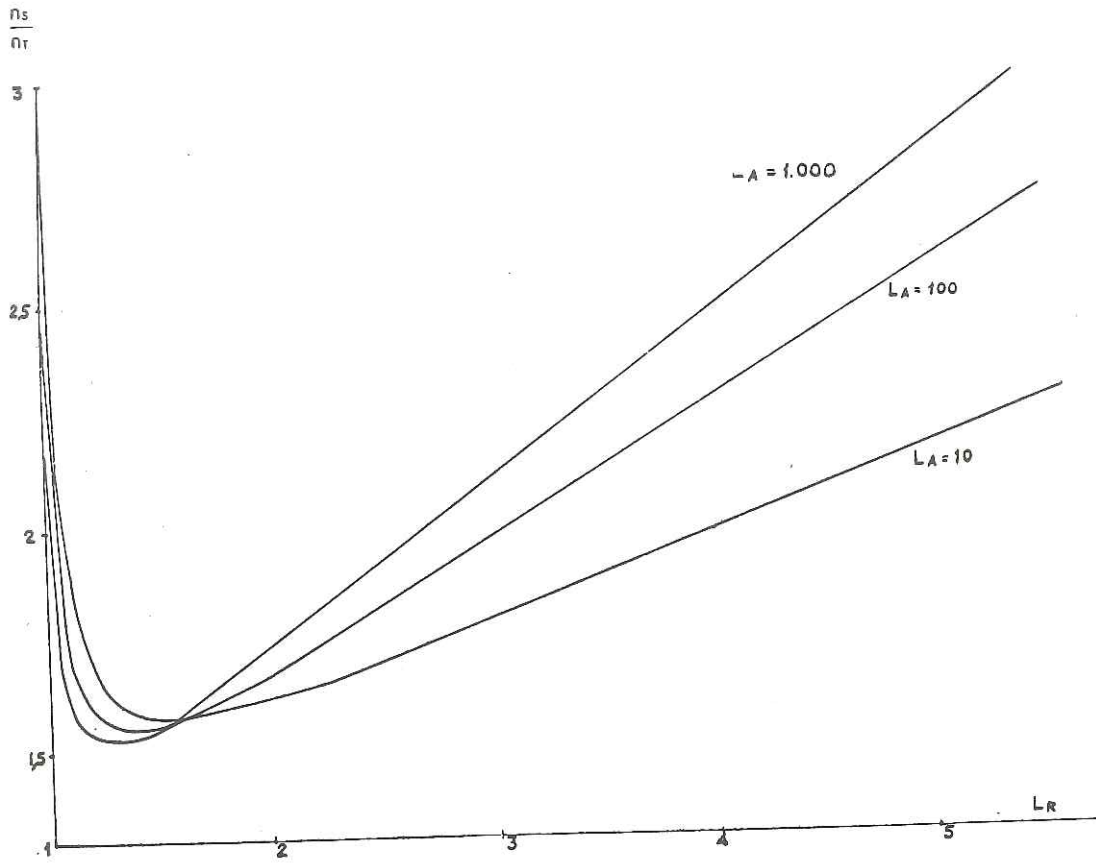

Fig. 5.

Remarquons que si l'on acceptait la proposition de Johnson et Léone qui considèrent β négligeable [3], cela équivaudrait à prendre $L_R = 1$ et,

par conséquent, les deux coefficients antérieurs seraient respectivement 6,908 et 4,605, le reste des variables se conservant inchangé.

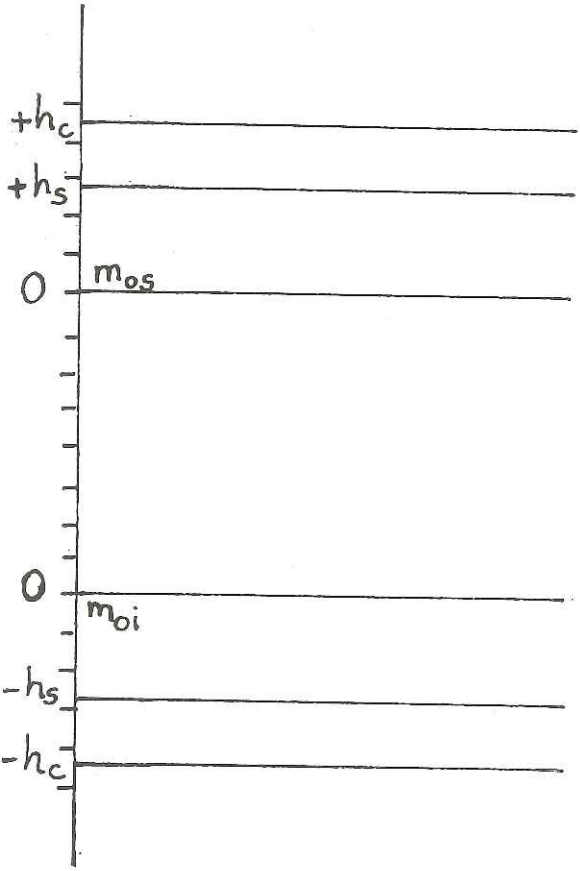

Fig. 6.

Il y aura lieu de tenir compte de la valeur de référence, c'est-à-dire celle que l'on doit soustraire à la moyenne de l'échantillon avant de l'accumuler aux observations antérieures. Elle est :

$$m_0 = \frac{m_A + m_R}{2}$$

Dans le cas d'existence de deux limites de tolérance, T_1 et T_2, la qualité non acceptable sera double et caractérisée par deux moyennes m_{Rs} et m_{Ri}, ainsi que la qualité limite acceptable m_{As} et m_{Ai} (bien qu'il puisse arriver que $m_{As} = m_{Ai}$).

Dans tous les cas, la valeur de référence sera aussi double : m_{0s} et m_{0i}. Souvent, cependant, ces limites et ces valeurs seront symétriques.

Nous avions pensé à l'occasion des premières applications de ces nouveaux procédés que le tracé des graphiques de contrôle par cumul d'observations pouvait être semblable à celui des graphiques classiques, c'est-à-dire formé par cinq droites parallèles, la centrale marquée 0 et les autres, symétriquement positives et négatives à des distances h_s et h_c. On marquait des points sur l'axe 0, pour mémoire, lorsque les moyennes étaient comprises entre m_{0i} et m_{0s}.

Maintenant, pour faciliter la compréhension et augmenter la quantité d'information contenue dans ces graphiques, nous conseillons de remplacer la droite centrale par une frange graduée d'après l'intervalle compris entre les deux valeurs de référence et y marquer les points représentatifs des échantillons à leur place pendant que la règle du cumul des observations ne joue pas (fig. 6).

6. — Comparaison des courbes d'efficacité.

Nous avons comparé la taille des échantillons pour des conditions d'efficacité semblables entre les graphiques de contrôle classiques et par cumul d'observations. Il faudra aussi comparer les courbes caractéristiques ou d'efficacité des deux méthodes.

Le tracé des deux courbes d'efficacité passant par les mêmes deux points $(1 - \alpha, m_A)$ et (β, m_R) (fig. 7) montre que dans l'intervalle compris entre ces points la courbe du graphique par cumul d'observations passe sous la courbe du graphique classique et par dessus en dehors de l'intervalle. Cela signifie que l'on s'aperçoit plus vite des petits dérèglements et moins vite des dérèglements supérieurs à m_R.

Cet inconvénient n'est pas grave si l'on considère que les dérèglements ne se produisent jamais instantanément et que la courbe d'efficacité mesurée en longueurs moyennes de rafale montre que la différence entre les délais de détection du dérèglement est vraiment négligeable au-delà de m_R.

7. — Les graphiques de contrôle de la variabilité par cumul d'observations.

La règle classique pour le contrôle de la dispersion est de considérer les étendues pour des échantillons de taille $\leqslant 12$ et les écarts-types pour des tailles plus grandes. Voyons comment cela va se passer si nous employons

des graphiques par observations accumulées à la place d'observations individuelles.

Dans le livre de l'Université de Columbia, on trouve déjà l'application de la théorie de l'analyse séquentielle de Wald au contrôle des écarts-types ou variances [6]. Du point de vue de l'efficacité réelle ou pratique du contrôle, cela n'est pas très intéressant parce que dans l'atelier des calculs où interviennent des carrés, même avec une table sous la main, ne sont pas très recommandables.

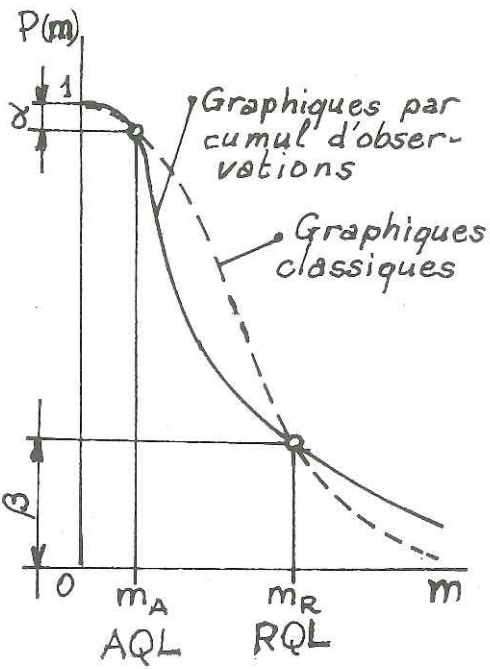

Fig. 7.

Des études de Cox (1949) [7], Patnaik (1950) [8] et Pearson (1952) [9], on déduit la possibilité d'employer les étendues pour le contrôle de la variabilité de la fabrication et cela avec des conditions d'efficacité supérieures à toutes autres formes de contrôle qui peuvent être *choisies à volonté*.

Signalons qu'il y a deux voies d'approche au résultat puisque la loi de probabilité des étendues s'exprime en forme approximative soit comme une loi de χ, soit comme une loi de χ^2. D'après Pearson, la première approximation est meilleure pour de petits échantillons (tailles inférieures à 10)

et la seconde pour des échantillons de tailles plus grandes que 9. Cependant, la première approximation donne lieu à des graphiques où les ordonnées sont le cumul des carrés des étendues, ce qui la rend peu utilisable dans l'atelier. Finalement, le choix doit se porter sur l'approximation qui assimile la loi des étendues à une loi de χ^2.

Si nous appelons φ le rapport entre les écarts-types refusable et acceptable σ_R et σ_A

$$\varphi = \sigma_R/\sigma_A$$

liés aux risques d'erreur classiques β et α respectivement, on déduit de l'article de Cox que les droites pour le contrôle séquentiel de réception sont :

$$\sum w' \leqslant -h_1 + s\,N = -a_A \frac{\varphi}{\varphi - 1} \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \frac{a_A\, b\, \varphi \ln \varphi}{\varphi - 1} N$$

$$\sum w' \leqslant h_2 + s\,N = a_A \frac{\varphi}{\varphi - 1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{a_A\, b\, \varphi \ln \varphi}{\varphi - 1} N$$

Dans ces formules, a_A et b sont des coefficients se rapportant à la loi Γ approchée, fonction de la taille n de l'échantillon :

$$\frac{e^{-(w/a)}\ (w/a)^{b-1}}{a\ \Gamma(b)}$$

et, d'autre part, valant :

$$a_n = \theta_n^2\ d_n\ \sigma \qquad b_n = 1/\theta_n^2$$

Dans ces dernières expressions, d_n est le rapport de l'étendue moyenne à l'écart-type de la population des mesures :

$$d_n = \bar{w}/\sigma$$

et θ_n le coefficient de variation des étendues dans des échantillons aléatoires de n unités et le réciproque du nombre d'Erlang de cette loi de probabilité.

Pour l'application des formules de l'analyse séquentielle aux graphiques de contrôle par cumul d'observations, nous écrirons :

$$h = h_2 = \frac{\theta_n^2\ d_n}{1/\sigma_A - 1/\sigma_R} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$$

$$s = \frac{d_n}{1/\sigma_A - 1/\sigma_R} \ln \frac{\sigma_R}{\sigma_A}$$

La première de ces deux formules donne l'ordonnée des droites limites pour les conditions d'efficacité choisies et la seconde la valeur de référence à soustraire de chaque étendue avant de l'additionner aux résultats antérieurs.

QUELQUES CONSTANTES DE LA LOI DE DISTRIBUTION DES ETENDUES

n	θ_n	d_n	$\theta_n^2\, d_n$	b_n	$\nu_n = 2\, b_n$
2	0,756	1,128	0,645	1,750	3,50
3	0,525	1,693	0,466	3,634	7,27
4	0,427	2,059	0,376	5,474	10,95
5	0,372	2,326	0,321	7,246	14,49
6	0,335	2,534	0,284	8,932	17,86
7	0,308	2,704	0,257	10,54	21,08
8	0,288	2,847	0,236	12,06	24,11
9	0,272	2,970	0,220	13,51	27,01
10	0,259	3,078	0,206	14,91	29,81

Le cumul des étendues devra donc être fait après soustraction de s, c'est-à-dire additionner les valeurs :

$$W'_N = \sum_{i=1}^{N} (w'_i - s)$$

à condition d'avoir $w'_i > s$ pour entreprendre le graphiquage des observations.

8. — Conditions d'efficacité des graphiques par cumul des étendues comparées aux graphiques classiques.

Dans la pratique du contrôle industriel au moyen des graphiques classiques, on a l'habitude, dans le meilleur des cas, d'admettre la taille des échantillons jugée appropriée pour le contrôle des moyennes, sans se préoccuper de la garantie qu'elle nous donne en ce qui concerne la variabilité ou dispersion du processus.

Avant de suivre cette voie, nous avons jugé bon d'étudier jusqu'à quel point ce procédé est acceptable.

Nous référant d'abord aux graphiques par cumul d'étendues, le nombre moyen d'échantillons à prélever lorsque la variabilité a augmenté jusqu'à σ_R pour décider le réglage (avec risque β) est :

$$E_R [N] = \overline{N}_{nR} = \frac{(1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} - \beta \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{b_n (- \ln \varphi + \varphi - 1)}$$

Si l'on veut, en moyenne, obtenir une décision au premier échantillon prélevé lorsque l'écart-type est σ_R, il faut égaler à 1 l'expression antérieure, ce qui donne :

$$b_n = \frac{(1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} - \beta \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\varphi - 1 - \ln \varphi}$$

Pour $\alpha = 0{,}001$ et $\beta = 0{,}5$, il résulte un échantillon minimal de 6 unités si $\varphi = 2$ et un échantillon de 10 unités si $\varphi = 1{,}75$.

Ce résultat est évidemment un résultat approché et valable seulement en moyenne et susceptible de grands écarts dans les applications pratiques. Cox [7] indique que cette formule est valable seulement pour E [N] grand, ce qui n'est pas notre cas.

Inversement, nous avons calculé pour chaque effectif des échantillons le rapport φ qui peut être décelé, en moyenne, au premier prélèvement, avec les risques $\alpha = 0{,}001$ et $\beta = 0{,}5$ habituels :

$$\varphi - \ln \varphi = \frac{(1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} - \beta \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{b_n} + 1$$

et nous les avons comparés avec les chiffres correspondants des graphiques par observations indépendantes calculés au moyen de la fonction de distribution de w'/σ. Les résultats figurent à la table ci-jointe.

Cette table montre la confiance très limitée que l'on peut avoir dans le contrôle de la dispersion d'un processus lorsqu'il est réalisé au moyen des graphiques classiques des étendues. On ne peut pas raisonnablement prétendre découvrir quelque augmentation de la variabilité avec les tailles d'échantillons les plus courantes, à moins qu'elle soit si forte qu'elle atteigne la valeur de 2 fois à 2 fois et demie, et plus, la valeur de l'écart-type acceptable. La fabrication serait vraiment déréglée si l'écart-type devenait le double ou le triple de celui qui est considéré comme bon.

Taille des échantillons n	φ	
	Observations cumulées	Observations indépend.
2	3,95	4,87
3	2,78	3,20
4	2,35	2,70
5	2,15	2,42
6	2,00	2,38
7	1,90	2,16
8	1,85	2,05
9	1,80	2,03
10	1,75	1,98

A la vue de la table antérieure, on pourrait penser que le gain d'efficacité des graphiques d'observations accumulées par rapport à ceux d'observations indépendantes n'est pas très important et qu'il ne vaut pas la peine de changer les uns pour les autres pour si peu.

Mais, en réalité, il y a une différence essentielle entre les deux, qui consiste en ce que les graphiques par cumul d'observations gardent l'information des échantillons précédents, c'est-à-dire que rien n'empêche de remplacer la condition de l'échantillon unique que nous avons établi pour qu'en moyenne un seul échantillon suffise à prendre la décision du réglage lorsque la dispersion a augmenté, par la condition de prendre simultanément deux, trois, ... N échantillons de n unités dont les points représentatifs seront placés successivement sur le graphique. Il n'est pas possible évidemment de le faire avec des observations indépendantes.

Alors :

$$b_n = \frac{(1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha} - \beta\ln\frac{1-\alpha}{\beta}}{N(\varphi - 1 - \ln\varphi)}$$

et

$$\varphi - \ln\varphi = \frac{(1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha} - \beta\ln\frac{1-\alpha}{\beta}}{N\,b_n} + 1$$

La table qui suit donne les rapports φ d'augmentation de l'écart-type que l'on décélerait en moyenne au N^{me} échantillon de n unités.

Taille des sous-échant. n	φ pour N =				
	1	2	3	4	5
2	3,95	2,82	2,40	2,15	2,00
3	2,78	2,15	1,90	1,75	1,67
4	2,35	1,90	1,70	1,60	1,53
5	2,15	1,75	1,60	1,50	1,43
6	2,00	1,67	1,52	1,43	1,38
7	1,90	1,61	1,47	1,40	1,35
8	1,85	1,56	1,43	1,37	1,32
9	1,80	1,52	1,40	1,35	1,30
10	1,75	1,50	1,38	1,33	1,28

On constate que si l'on prend deux sous-échantillons de 4 unités, l'efficacité est moindre que si l'on prenait un seul échantillon de 8 unités, bien que le nombre total d'observations soit le même. Il y a donc intérêt à se servir d'échantillons multiples seulement après avoir dépassé la limite à partir de laquelle les étendues sont peu représentatives de la variabilité du processus.

Le procédé équivalent pour des observations indépendantes consisterait à prendre N échantillons et calculer la moyenne des étendues. Les limites de contrôle dans le graphique à employer devraient être calculées en tenant compte de cela. Cependant, l'efficacité diminuerait aussi en passant d'un seul échantillon de 8 unités à deux de 4 et encore davantage en passant à 4 sous-échantillons de 2 unités.

On peut augmenter l'information recueillie dans les observations au moyen du procédé indiqué par Cox [7] afin de tenir compte de la variation entre les N sous-échantillons prélevés en même temps.

Cela consiste à calculer les totaux de ces sous-échantillons pris en nombre égal à celui des unités qui les composent (N = n) et ensuite l'étendue de ces totaux. L'étendue des totaux divée par $\sqrt{n}$ donne une valeur comparable aux étendues des sous-échantillons et, par conséquent, une point supplémentaire à situer sur le graphique.

En dehors du cas où n = 4 ou 9, les calculs sont trop compliqués pour être employés couramment dans un atelier. Pour avoir une meilleure efficacité pratique, il vaut mieux s'abstenir d'utiliser cette étendue supplémentaire.

Par contre, agissant dans la direction proposée par Cox, afin de considérer la variabilité entre sous-échantillons, rien n'empêche de prendre la matrice des observations et calculer les étendues des sous-échantillons horizontalement et verticalement de façon à doubler leur nombre. Les rapports d'augmentation de la variabilité que l'on pourra détecter en un seul prélèvement, selon la matrice d'observation recueillie et la méthode de calcul choisie, par cumul d'observations, sont :

Nombre d'observations	Méthode Cox		Etendues calculées horiz. et vertic.		Méth. Cox appliquée horiz. et vertic.	
	Nbre éten	φ	Nbre éten	φ	Nbre éten	φ
$2 \times 2 = 4$	3	2,40	4	2,15	6	1,90
$3 \times 3 = 9$	4	1,75	6	1,60	8	1,50
$4 \times 4 = 16$	5	1,50	8	1,40	10	1,35
$5 \times 5 = 25$	6	1,40	10	1,30	12	1,28
$6 \times 6 = 36$	7	1,32	12	1,25	14	1,22

On peut constater que ces procédés donnent un gain important d'efficacité et une économie voisine de la moitié des observations.

9. — Influence du dérèglement de la variabilité sur les graphiques des moyennes.

La taille des échantillons nécessaires pour détecter un déréglage de la moyenne à partir de la valeur des pourcentages de déchets correspondant aux qualités acceptable et refusable est, comme nous l'avons vu, indépendante de la dispersion du processus, aussi bien avec les graphiques par cumul d'observations qu'avec les graphiques classiques.

Il n'en est pas de même pour les distances h_s et h_c, limites de surveillance et de contrôle des graphiques par cumul d'observations. En effet :

$$h_2 = \frac{\sigma}{n\,(t_A - t_R)} \ln \frac{L_A}{L_R}$$

si l'on remplace les valeurs moyennes m_R et m_A par leur expression en fonction des pourcentages de déchets et l'écart-type. Toute augmentation admise de l'écart-type devrait faire éloigner de l'axe les droites limites de

contrôle et surveillance; du fait qu'elles ne sont pas déplacées, il apparaîtra que le contrôle est plus sévère que nécessaire pour les moyennes. Cela corrigera donc l'excès de tolérance que l'on a dans le contrôle de la variabilité et agira indirectement pour améliorer un tel résultat.

10. — Conclusion.

L'efficacité que l'on peut attendre des graphiques de contrôle par cumul d'observations est toujours supérieure à celle des graphiques de contrôle par observations indépendantes, ce qui conseille de les employer de préférence, dans tous les cas.

Il faut connaître, cependant, les limites de cette efficacité pour ne pas leur demander plus que ce qu'ils peuvent donner. Notamment le contrôle de la variabilité est très peu efficace; on peut penser que souvent un échantillon dont la taille est suffisante pour déceler le déréglage de la moyenne ne le sera pas pour détecter les dérangements de la dispersion.

Le contrôle simultané de la moyenne corrige un peu ce résultat, mais la meilleure solution serait de prendre des échantillons multiples dont les étendues seraient représentées par des points successifs sur le graphique de contrôle.

Résumé.

Les graphiques de contrôle classiques de Shewart ont l'inconvénient de ne pas utiliser l'information contenue dans les observations précédentes, puisque l'on se limite chaque fois à considérer seul l'échantillon présent. Les graphiques de contrôle par cumul d'observations n'ont pas cet inconvénient et sont, par conséquent, plus efficaces.

La comparaison de l'effectif des échantillons nécessaires dans les deux méthodes pour des conditions d'efficacité données confirme que les nouveaux graphiques sont plus intéressants de ce point de vue. En effet, les graphiques classiques demandent plus de 50 % de pièces supplémentaires par rapport à ce qui est nécessaire avec les observations accumulées dans le cas le moins favorable pour celles-ci, et jusqu'à plus de 200 % dans d'autres cas.

Pour avoir l'efficacité pratique désirable, il faut cependant que ces nouveaux graphiques soient d'un emploi aisé, ce qui est obtenu avec des droites limites parallèles, au lieu des masques en V proposés par d'autres auteurs. Ainsi on arrive à avoir des graphiques qui ne sont pas plus compliqués à calculer et à tracer que les graphiques classiques.

La théorie des nouveaux graphiques est basée sur l'analyse séquentielle de Wald et elle est applicable aussi bien au contrôle des moyennes qu'à la dispersion. Cette théorie permet de déterminer facilement la taille de l'échantillon à partir des conditions d'efficacité choisies, dans tous les cas de leur application.

Bibliographie et notes.

[1] J. Torrens-Tbern. « Les metod·s estadisticos de control et les procesos industriales continuos ». *Cuadernos de Estadistica Aplicada e Investigación Operativa*, Barcelona, Vol. II, (1963) Fasc. 3, p. 151-152.
— « Les méthodes statistiques de contrôle dans les processus industriels continus ». *Revue de Statistique Appliquée*, Paris, Vol. XIII, (1965), n° 1 - p. 67-68.

[2] W.D. Ewan and K.W. Kemp. « Sampling Inspection of Continuous Processes with no Autocorrelation between successive results. *Biometrika*, London, Vol. 47 (1960) p. 363-380.
— R.H. Woodsward et P.L. Goldsmith. « *Cumulative Sum Techniques* ». I.C.I. Monograph n° 3 - Oliver Boyd, London, (1964), p. 20-27.

[3] N.L. Johnson et F.C. Leone. « Cumulative Sum Control Charts. Mathematical Principles applied to their Construction and Use ». *Ind. Qual. Contr.*, XVIII, 12, June 1962, p. 15-21. XIX, 1, July 1962, p. 29-36; 2, Aug. 1962, p. 22-29.

[4] Statistical Research Group, Columbia University. « *Sequential Analysis of Statistical Data; Applications* ». (1947) p. 4-10 et 4-11.

[5] R. Cavé. « *Le Contrôle Statistique des Fabrications* ». - Eyrolles, Paris, (1961), 2e édition, p. 431-433.

[6] Statistical Research Group, Columbia University. « *Sequential Analysis of Statist. Data, Applications* ». Section 6.

[7] D.R. Cox. « The use of the Range in Sequential Analysis ». *J. Roy. Stat. Soc.*, Ser. B. 11 (1949), p. 101-114.

[8] P.B. Patnaik. « The non central χ^2 and F distributions and their applications ». *Biometrika*, London, Vol. 37 (1950) p. 202-232.

[9] E.S. Pearson. « Comparison of 2 Approximations to the distribution of Range in Small Samples from Normal Populations ». *Biometrika*, London. Vol. 39 (1952).

UN EXEMPLE DE PROBLEME DE GESTION EMPRUNTE A LA TELEPHONIE INTERURBAINE MANUELLE, DONT LA SOLUTION OPTIMUM EST DE COUT NUL

par P. DE MUNTER et J. GAUTHIER

§ 1. La recherche opérationnelle n'est pas seulement un ensemble de techniques mathématiques pour rendre plus efficiente l'activité technico-humaine, c'est surtout un état d'esprit, une disposition mentale à rechercher à rendre optimale cette activité, c'est-à-dire à augmenter son rendement pour un accroissement de coût minimal. Les exemples où l'accroissement de rendement peut s'obtenir pour un coût nul sont, à notre connaissance, suffisamment rares pour être signalés, surtout s'il se présente des solutions techniques tentantes mais coûteuses.

Le § 2 est consacré à la description du Central interurbain de la ville A; il s'agit d'une installation ancienne, donc manuelle, située dans un pays en voie de développement. Le problème auquel est consacré cet article est né des plaintes des opératrices : elles prétendaient disposer de trop peu de lignes d'appel pour écouler le trafic vers la ville B. Or, s'il y a des crédits pour de nouvelles installations automatiques, il n'y en a pas ou peu pour améliorer, à fonds perdus, des installations périmées. Nous verrons que l'étude du trafic a suggéré une intervention dans la gestion du Central évitant toute dépense et conservant les normes. Le § 3 est consacré à la vérification des hypothèses qui sont à la base d'un modèle mathématique poissonnien pour le processus des appels et des cessations de conversation. La solution technique coûteuse au problème posé par les opératrices est décrite au § 4. L'étude du trafic est exposée aux §§ 5, 6 et 7; on en déduit une solution de coût nul décrite à la fin du § 7.

§ 2. Nous nous trouvons dans le Central interurbain de la ville A et nous nous intéressons à l'écoulement du trafic téléphonique de A vers la ville B.

Le Central n'étant pas automatique, pour écouler un appel interurbain émanant d'un abonné de A, une opératrice est amenée à rappeler l'abonné demandeur. L'appel et le rappel ont lieu au moyen de lignes d'appel interurbaines sur lesquelles l'opératrice numérote avec un clavier ou un cadran. Il y a 100 lignes d'appel de ce type. Elles sont groupées par lots de 10 lignes,

chaque lot étant associé à un orienteur.D'autre part, chaque ligne est reliée rigidement à un sélecteur interurbain; l'orienteur associé a pour objet d'orienter ce sélecteur d'après le premier chiffre envoyé par l'opératrice.

Lorsqu'un abonné de A, le 217803 par exemple, demande un abonné de B, l'opératrice prend note des numéros du demandeur et du demandé. Elle appelle ensuite le demandeur sur une ligne d'appel interurbaine dont elle s'empare en enfichant dans une ligne signalée disponible par un signal d'inoccupation qui s'allume devant elle.

Il est important de savoir que tout l'orienteur associé à la ligne prise par l'opératrice reste bloqué à la disposition de l'opératrice jusqu'à ce que le premier chiffre du numéro demandeur soit envoyé. Une fois le chiffre 2 envoyé, l'orienteur est libéré et une autre opératrice peut l'utiliser pour une autre communication.

En résumé, nous voyons donc que, pour obtenir un orienteur, l'opératrice doit pousser sur un bouton, une lampe s'allume qui correspond à une ligne associée à un orienteur et l'opératrice en enfichant bloque cet orienteur jusqu'à ce qu'elle ait envoyé le premier chiffre du numéro d'appel.

Nous appelons *durée d'orientation* tout le temps qu'une opératrice rend indisponible un orienteur. Normalement, une opératrice entraînée provoque des durées d'orientation de 3 sec. Mais il suffit de modifier l'ordre des opérations pour que la durée d'orientation otteigne 5, 10 ou même 20 sec. Par exemple, l'opératrice peut enficher dès qu'un appel survient, avant d'être certaine que l'abonné demandé puisse être atteint immédiatement, ou bien l'opératrice tarde à numéroter pour des raisons diverses (opératrice débutante, intervention sur une autre communication en cours, etc.).

Nous appellerons *trafic fictif* l'indisponibilité des lignes provenant du blocage des orienteurs pendant les durées d'orientation et *trafic-conversation* l'indisponibilité des lignes provenant de leur occupation par les conversations entre les abonnés des deux villes A et B. Le trafic-conversation est supporté uniquement par les circuits interurbains tandis que le trafic fictif est porté réellement par les lignes d'appel interurbaines et fictivement par les circuits.

§ 3. Les 100 lignes interurbaines ont été établies pour écouler tout le trafic sans attente. Un ampèremètre enregistreur du trafic écoulé indique que, pendant les heures chargées, 60 lignes sont occupées en moyenne. Cela signifie que si l'on observe un grand nombre de fois le nombre de lignes occupées par les conversations à un instant quelconque (pendant les heures chargées) la moyenne arithmétique de ces observations est 60. Il est à préciser que l'ampèremètre enregistre les durées d'occupation des lignes d'appel interurbaines par les conversations et leur préparation.

Le même ampèremètre enregistreur indique des pointes d'occupation de 80 lignes et, plus rarement, de 85 lignes.

L'étude statistique du processus stochastique constitué par les appels et les cessations de conversation a montré que les hypothèses poissonniennes sont satisfaites.

Par conséquent, le modèle mathématique qui convient pour représenter l'occupation des lignes par les conversations est celui décrit par W. Feller, dans « Probability Theory and its Applications », page 377 (J. Wiley, 1950). En effet, le trafic-conversation n'utilise jamais toutes les lignes; il est donc légitime de supposer qu'il y a une infinité de lignes à la disposition des opératrices.

Notons N la grandeur « nombre de lignes occupées par les conversations à un instant donné »; les valeurs possibles de N sont 0, 1, 2, ... et l'espérance mathématique de N est 60. D'après le modèle mathématique la probabilité pour que N prenne une valeur n est e^{-60} $[(60)^n/n!]$. En particulier, on trouve que la probabilité pour que N dépasse 80 est d'environ 0,005; autrement dit, sur 1000 observations aléatoires du trafic-conversation, 5 fois environ il y aura plus de 80 lignes occupées.

D'une manière générale, la validité du modèle mathématique est confirmée par les observations; en particulier, les observations des pointes de trafic. Le calcul (théorique) de la moyenne et de l'écart-type de la distribution asymptotique de la plus grande valeur d'un échantillon d'une centaine d'observations conduit aux résultats suivants. La moyenne vaut $60 + 2{,}5\sqrt{60}$ ($\cong 80$) et l'écart-type vaut $(\pi/6)\ 0{,}375\sqrt{60}$ ($\cong 4$). La plus grande valeur se trouve donc, avec une probabilité d'environ 0,95, dans l'intervalle (72, 88); c'est effectivement ce qui a été observé. (Les coefficients 2,5 et $(\pi/6)$ 0,375 sont tirés de E.J. Gumbel, « Statistical Theory of Extreme Values », National Bureau of Standards, Washington D.C., 1954, p. 26).

§ 4. Nous venons de voir que le trafic-conversation occupe en moyenne 60 lignes sur 100 et qu'il atteint 80 à 85 lignes. Théoriquement, l'installation répond à l'exigence initiale d'un écoulement sans attente.

Or, les opératrices se plaignent assez fréquemment de manquer de lignes. Il n'est pas question de mettre en doute les plaintes des opératrices et par conséquent, il faut convenir que le trafic fictif qui vient de l'indisponibilité des orienteurs pendant les durées d'orientation et qui s'ajoute au trafic-conversation provoque le dépassement des disponibilités. Le trafic fictif qui vient de l'indisponibilité d'un orienteur pendant une durée d'orientation n'est observé par aucun appareil enregistreur.

Rappelons que chaque demande, qu'elle aboutisse ou non à une occupation « conversation », provoque à l'enfichage l'indisponibilité de 10 lignes. Pour diminuer cette occupation fictive, une solution technique simple s'impose immédiatement : au lieu d'associer les lignes par lots de 10 on les associera par lots de 5. Il suffit d'ajouter à l'installation 10 orienteurs ! Cette installation est techniquement simple; elle a le défaut d'être coûteuse.

D'autres solutions techniques peuvent être envisagées; par exemple le câblage de 8 lignes par orienteur. Cette solution, moins coûteuse que la précédente, est techniquement plus compliquée à réaliser. De toute manière, un fait s'impose : les crédits d'équipement ne permettent pas d'ajouter des orienteurs à l'installation actuelle. D'autre part, il faut se rendre à l'évidence que l'installation a été calculée pour écouler le trafic sans attente. Les plaintes des opératrices proviennent peut-être d'un défaut dans la gestion de l'installation ?

§ 5. Le modèle mathématique décrit au § 3 ne tient pas compte de l'existence d'un trafic fictif. Il est conçu pour une installation où les opératrices ont directement le contact avec les lignes, sans l'intervention intermédiaire des orienteurs.

Nous allons donc tenter de déterminer ce que nous conviendrons d'appeler le *trafic réel,* c'est-à-dire le nombre de lignes indisponibles en moyenne, l'indisponibilité du trafic-conversation et du trafic fictif.

Lorsqu'un appel survient, l'enfichage sur une ligne d'appel interurbaine rend indisponible à un autre appel pendant la durée d'orientation. Si un autre appel survenait *après* cette durée d'orientation et s'il n'en était jamais autrement, il n'y aurait pas lieu de s'intéresser au trafic fictif. Par contre, si plusieurs appels surviennent pendant la durée d'orientation, autant d'orienteurs sont rendus indisponibles. Il convient donc d'avoir à notre disposition le modèle mathématique qui représente les arrivées des appels. Plus précisément, ce qui nous intéresse est la probabilité d'occurrence d'un certain nombre d'appels pendant un certain intervalle de temps, la durée d'orientation.

Nous appellerons *appels simultanés* les appels qui surviennent pendant une durée d'orientation. Nous notons h la durée d'orientation et nous désignerons par I_h la grandeur (aléatoire) qui représente le nombre d'appels simultanés; les valeurs possibles de I_h sont $i_h = 0, 1, 2, \ldots$ Pour obtenir la probabilité $P(I_h = i_h)$ il suffit de revenir au modèle décrit au § 3. En effet, N représente le nombre de lignes occupées lorsque le processus d'appels

et de cessations de conversations fonctionne. Dans ce cas, $P(N = n) = e^{-a}\,(a^n/n!)$ où a représente le nombre moyen de lignes occupées. Supposons maintenant qu'il n'y ait aucune cessation de conversations; dans ce cas, N représente le nombre d'appels pendant une durée h. Soit L le *taux des arrivées d'appels*, c'est-à-dire le nombre d'appels par seconde. En moyenne, il arrive donc $a = Lh$ appels pendant une durée h. Et par conséquent,

$$P\,(I_h = i_h) = e^{-Lh}\,\frac{(Lh)^{i_h}}{i_h!}$$

Il a été observé pendant les heures chargées un taux d'arrivées d'appels moyen égal à 1/4; autrement dit, il arrive en moyenne 1 appel toutes les 4 secondes.

Les probabilités $P\,(I_h = i_h)$ ont été calculées pour les durées d'orientations 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 et reproduits au tableau I.

Nous avons également indiqué le nombre moyen s de fois que l'événement $I_h = i_h$ survient pendant l'heure :

$$s = \frac{3600}{h}\,P\,(I_h = i_h)$$

§ 6. On peut supposer que le trafic-conversation moyen se répartit uniformément parmi les orienteurs. Puisqu'il y a en moyenne 60 lignes occupées par les conversations, il y a donc 6 lignes occupées par les conversations sur chaque orienteur. Un appel rend donc fictivement indisponible 4 lignes en moyenne, pendant une durée d'orientation; I_h appels simultanés provoquent donc 4 I_h occupations fictives.

Or, nous avons vu au paragraphe précédent que l'espérance mathématique de I_h est $h/4$; par conséquent, le *trafic moyen fictif* est h. Le *trafic réel moyen* est donc $60 + h$.

Notons N_r la grandeur qui représente le trafic réel, et notons c le nombre de lignes disponibles (nous savons que $c = 100$, mais nous supposons actuellement ignorer cette information). Nous voulons déterminer c de telle sorte que l'événement aléatoire $N_r > c$ survienne avec une probabilité inférieure ou égale à 0,0025, seuil habituellement utilisé en téléphonie. Dans notre cas où il y a 900 appels par heure en moyenne, cela signifie que l'on admet l'attente 9 fois sur 4 heures.

Nous pouvons considérer en première approximation la variable N_r comme une variable de Poisson; par conséquent, la variance de N_r est

TABLEAU I. — *Valeurs de* $P(I_h = i_h)$ *pour diverses valeurs de h.*

h	3		4		5		6		7		8		9		10	
i_h	P	s	P	s	P	s	P	s	P	s	P	s	P	s	P	s
4	63,2	7,5	153,3	14,7	290	21	470	28,2	684	35,15	900	40,5	1197	47	1330	47,88
5	10,4	1	30,7	2,7	63	4,4	140	8,4	240	12,33	360	16,2	540	21,6	660	23,76
6					12	1	30	1,8	70	3,6	120	5,4	202	8	270	9,72
7									17	0,9	30	1,35	70	2,8	90	3,24
8													21	0,8	30	1,08

N.B. P est exprimé en 10 millièmes.

$60 + h$. D'autre part, la moyenne $60 + h$ est suffisamment grande pour utiliser dans les calculs l'approximation normale de la distribution de Poisson. Par conséquent, l'événement $N_r > c$ est équivalent à

$$Z > \frac{c - 60 - h}{\sqrt{60 + h}}$$

où Z est une variable aléatoire normale de moyenne 0 et d'écart-type 1. Pour que la probabilité de l'événement soit inférieure ou égale à 0,0025, il faut que

$$\frac{c - 60 - h}{\sqrt{60 + h}} \geqslant 2{,}81, \quad \text{ou} \quad c \geqslant 2{,}81\sqrt{60 + h} + 60 + h.$$

Nous avons reproduit au tableau ci-après les valeurs du second membre qui correspondent à $h = 0, 5, 8, 10, 15, 16, 21$.

h	0	5	8	10	15	16	21
$c \geqslant$	82	88	91	94	99	100	106

On constate donc que si les durées d'orientation ne dépassent pas 15 sec, l'installation satisfait aux exigences du trafic réel, dans la mesure où l'on admet, en ce qui concerne ce trafic, une attente éventuelle 9 fois au plus sur 4 heures.

L'attente tolérée est nettement insuffisante pour justifier la fréquence des plaintes des opératrices. D'autre part, s'il a été constaté que certaines opératrices provoquent des durées d'orientation supérieures à 15 sec, ce fait est trop rare pour justifier à lui seul le manque de lignes fréquemment observé par les opératrices.

§ 7. Nous en revenons à la solution préconisée au § 4, à savoir l'augmentation du nombre des orienteurs. En effet, nous venons de voir au § 6 que les 100 lignes de l'installation suffisent à écouler le trafic réel pour autant que l'on impose aux opératrices de ne jamais dépasser 15 sec pour les durées d'orientation. Or, cette dernière contrainte est facilement satisfaite, donc, s'il ne manque pas de lignes, c'est qu'il manque des orienteurs. La considération du trafic à un instant donné va pourtant nous permettre d'éviter l'augmentation du nombre des orienteurs par une intervention dans la gestion de l'installation.

Plaçons-nous à un instant donné et supposons qu'à cet instant il survient I_h appels simultanés. Cette occurrence provoque l'indisponibilité de I_h orienteurs et par conséquent de 10 I_h lignes. D'autre part, cette occurrence provoque l'occupation de I_h lignes par les conversations.

Le trafic engendré par les appels et les cessations de conversations provoque à cet instant $N - I_h$ occupations de lignes; mais il ne dispose pour s'écouler que de $100 - 10\ I_h$ lignes. Il y aura donc attente à l'instant considéré si $N - I_h > 100 - 10\ I_h$. Nous avons vérifié que le calcul de la probabilité de cet événement n'est pas entaché d'une erreur importante si l'on remplace N par sa moyenne 60. Par conséquent, il y a attente à l'instant considéré si $I_h > 40/9$, c'est-à-dire si $I_h \geqslant 5$. Le tableau du § 5 permet de calculer le nombre de fois que cet événement survient dans l'heure; voir tableau ci-après.

h	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombres de fois l'heure de $I_h \geqslant 5$	1	3	6	11	17	23	32	39

On constate donc que si le trafic moyen est écoulé sans attente alors même que les durées d'orientation atteignent 15 sec, le trafic instantané peut être encombré anormalement pour des durées d'orientation inférieures à 10".

Le calcul qui précède fournit une estimation trop forte du nombre de fois dans l'heure où l'attente peut survenir dans le trafic instantané. En effet, le trafic supporté par les orienteurs rendus indisponibles à l'instant t a été sous-estimé. En fait ce trafic peut être supérieur au nombre d'appels instantanés; mais son estimation est rendue difficile par l'absence d'informations quant à la distribution des appels parmi les orienteurs.

Remarquons d'autre part que dans tout ce qui précède les conséquences de l'indisponibilité due aux conversations et aux durées d'orientation ont été considérées du seul point de vue des lignes proprement dites, c'est-à-dire des lignes d'appel interurbaines pour appeler ou rappeler les abonnés de A. Considérons maintenant le trafic du seul point de vue des orienteurs.

Notons R le nombre d'orienteurs bloqués par le trafic moyen. Etant donné qu'il y a 1 appel toutes les 4 secondes, il y a $h/4$ appels pendant une durée h et l'espérance mathématique de R vaut donc $h/4$. Considérons la variable R comme une variable binomiale; les paramètres de sa distribution sont donc $(h/40, 10)$. Approximativement, on peut considérer R comme une

variable de Poisson de paramètre $h/4$. D'autre part, I_h est une variable de Poisson de paramètre $h/4$ également.

A un instant donné, supposons qu'il survient I_h appels instantanés. Ces appels rendent indisponibles I_h orienteurs. Cette indisponibilité instantanée s'ajoute à l'indisponibilité moyenne des orienteurs. Appelons Y l'indisponibilité totale $R + I_h$. La moyenne de Y est $h/2$. La variance de Y est la somme des variances et du double de la covariance. Or, nous avons, en notant E l'opérateur de moyenne,

$$E(R\,I_h) = E\,[R\,E\,(I_h/R)] = E\,R^2 = h/4 + h^2/16$$

où, il convient de le remarquer, nous avons sous-estimé $E\,(I_h/R)$ en ramenant le trafic instantané au trafic moyen. Par conséquent,, la covariance vaut $h/4$ et la variance de Y vaut h.

Il y a attente à l'instant considéré si l'événement $Y \geqslant 10$ survient, ou bien si l'événement

$$Z = \frac{Y - h/2}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{10 - h/2}{\sqrt{h}}$$

survient, où nous supposons que Z a une distribution approximativement normale (0, 1).

On calcule aisément que si $h = 6$ l'événement $Y \geqslant 10$ survient environ 2 fois l'heure; si $h = 9$ il survient 14 fois l'heure et si $h = 16$ il survient 92 fois l'heure. Ces résultats sont, rappelons-le, des sous-estimations.

Il résulte de ce qui précède que 10 sec peut être considéré comme un seuil critique pour les durées d'orientation, lorsqu'il est tenu compte du trafic instantané, alors que le seuil critique est de 15 sec pour le trafic moyen.

L'accroissement du nombre des orienteurs a pu être évité par deux modifications dans la gestion du service, inspirées par les considérations qui précèdent. D'une part, l'application stricte de consignes quant aux durées d'orientation. D'autre part, la libération automatique des orienteurs si l'opératrice met plus de 10 sec à envoyer le premier numéro. Cette solution est de coût nul.

PUBLICATIONS REÇUES — ONTVANGEN PUBLICATIES

1) Boletin de la Sociedad Argentina de Investigacion Operativa, Buenos-Aires, N° 15, 4e trimestre 1966.

2) Operational Research Quarterly, London, Vol. 18, N° 2, 1967.

3) Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 9, N° 1, December 1966 & N° 2, April 1967.

4) Revue française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, AFIRO Paris, N° 2, mars/avril 1967.

5) Cuadernos de Estadistica Aplicada e Investigacion Operativa, Barcelone, Vol. IV, Fasc. 4, 1965.

6) Trabajos de Estadistica y de Investigacion Operativa ,Madrid, Vol. XVII, Cuadernos II y III.

7) Annales de Sciences Economiques Appliquées, N° 5, décembre 1966, N°s 1 & 2, mars et mai 1967.

8) Operationele Research Mededelingen, 's Gravenhage, N° 1-2-3, januari, februari & maart 1967.

9) Oost-Vlaanderen groeit, N° 1 & 2, 1967.

10) QF (Qualité et Fiabilité) Bulletin trimestriel de l'AFCIQ, Paris, Vol. III, N° 1, mars 1967 et Vol. III, N° 2, juin 1967.

11) The General Electric Forum, Washington, Vol. IX, N° 3, July/September 1966.

12) Revue Suisse pour l'Organisation Industrielle (Institut d'Organisation Industrielle de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich), N°s 2 à 7, 1967.

13) Revue IBN (Institut Belge de Normalisation), N°s 2 à 6, 1967.
BIN Revue (Belgisch Instituut voor Normalisatie), N°s 2 tot 6, 1967.

14) Revue de Statistique appliquée, Vol. 15, N° 2, 1967.

15) Revue de l'Institut international de Statistique, La Haye, Vol. 35, N° 2, 1967.

NOS ECHOS

Le Secrétariat de la SOGESCI a reçu les informations suivantes :

— Mme LORIS-TEGHEM, membre de la Sogesci, MM. J. TEGHEM, Professeur à l'U.L.B. et Président de la Sogesci, P. GENNART, Professeur à l'Ecole Royale Militaire, D. RIBBENS, Chef de Travaux à la Faculté Polytechnique de Mons, P.-J. COURTOIS, Ingénieur à la M.B.L.E., P. WODON, Ingénieur à la M.B.L.E. et J. RADELET, Ingénieur aux A.C.E.C., ont participé aux travaux du Congrès que l'AFIRO a tenu à Nancy du 22 au 24 mai 1967.
Mme Loris-Teghem y a présenté une communication.

— Le Professeur J. TEGHEM a été invité, dans le cadre des accords culturels avec la République fédérale allemande, à faire deux conférences à l'Université de Bonn. Il y a pris la parole les 12 et 13 juin 1967.

ALLERLEI

Het Secretariaat van het SOGESCI heeft de volgende mededelingen ontvangen :

La recherche opérationnelle et la Direction générale de l'Entreprise.

Un séminaire remarquable : « What can Operations Research do for Top-Management ? ».

L'Institut Postuniversitaire et Administration des Affaires, appartenant aux Facultés Universitaires Saint Ignace (Anvers), qui depuis 1965 offre au début de chaque année académique un programme exceptionnel au niveau « top management » a porté son choix cette année-ci à la recherche opérationnelle.

Depuis vingt ans, beaucoup a été dit et redit concernant la recherche opérationnelle ; quelques fois, la direction de l'entreprise se sent un peu désorientée devant la complexité et la multitude de techniques de la recherche opérationnelle. Néanmoins le chef d'entreprise, habitué à dépasser les horizons de sa propre entreprise, admet sans peine que la recherche opérationnelle constitue de nos jours une méthode de travail, dont l'efficience ne peut plus être mise en doute. Il en résulte de toute évidence qu'une entreprise qui renoncerait à tirer profit des possibilités offertes par la recherche opérationnelle, se placerait ipso facto dans un état d'infériorité par rapport aux entreprises concurrentes qui s'y adonneraient.

Le séminaire « What can Operations Research do for Top Management » organisé par l'Institut Postuniversitaire Saint Ignace n'a d'autre but que de mettre la direction générale, donc les chefs d'entreprise, au courant des dernières prises de position des plus éminents spécialistes en la matière.

A cet égard il est à signaler que Monsieur J. MAGEE, Vice-président de l'Arthur D. Little et Président de l'Operations Research Society of America a bien voulu accepter de venir assumer la présidence de ce séminare. Monsieur J. Magee s'est acquis une grande notiriété dans les milieux professionnels de la recherche opérationnelle par ses nombreux et importants ouvrages en cette matière.

Nous signalons entre autres :

— Production Planning and Inventory Control (1958)

— Physical Distribution Systems (1967)

— Industrial Logistics : Analysis of Physical Supply and Distribution Systems (1957)

— Production Planning and Inventory Control (1967).

Les sujets suivants seront traités au cours de ce séminaire :

— The role and status of Operations Research today.

— Operations Research approach to long-range corporate planning.

— Managerial Decision Making from an O.R. viewpoint.

— Methods of Operations Research and their application in various functional areas of business.

Le séminaire « top-management » aura lieu à Anvers, les *17, 18 et 19 octobre 1967*. Les exposés se tiendront en anglais ; des discussions en français et allemand seront possibles.

Les personnes, désireuses de recevoir de plus amples informations concernant cette initiative sont priées de s'adresser à L'Institut d'Enseignement Postuniversitaire - Facultés Universitaires Saint-Ignace, Prinsstraat 13, Antwerpen 1. Tél. (03)32.14.18.

Un programme détaillé est disponible et sera envoyé à première demande.

ANNOUNCEMENT

A European meeting on statistics, econometrics and management science will be held in Amsterdam from 2 to 7 September, 1968. The Conference is a joint venture of the Institute of Mathematical Statistics (IMS), the International Association for Statistics in Physical Sciences (IASPS - a section of the ISI), the Econometric Society (ES) and The Institute of Management Sciences (TIMS).

The organisation of the conference is undertaken by the Mathematical Centre in Amsterdam in collaboration with the Permanent Office of the ISI. An Organizing Committee has been set up and is composed of :

Prof. J. Hemelrijk (chairman, representing IMS), Prof. H.C. Hamaker (representing IASPS), Prof. P. de Wolff (representing ES), Prof. S. de Leve (representing TIMS) and Drs. E. Lunenberg (ISI Permanent Office).

The programme will include *invited papers* (providing surveys on general and special subjects, and papers showing the results of new research) as well as *contributed papers*. The Programme Committee is composed of the first four members of the Organizing Committee, together with Prof. P. Wittle (IMS), Prof. M.S. Bartlett (IASPS), Prof. J.A. Mirrlees (ES) and Prof. G. Morton (TIMS). Those wishing to present a contributed paper are requested to advise the secretariat of the conference not later than *1 March 1968.*

Details about the conference, requirements for the submission of papers and registration forms will be communicated toward the end of 1967 to the European members of the societies concerned. Non-members wishing to receive further information may write to the secretariat of the Conference.

All correspondence should be addressed to the Secretary of the meeting, Mrs. S.J. Kuipers-Hoekstra, Mathematical Centre, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam, Netherlands.

Prix de vente

Au numéro :	Belgique	75 FB
	Etranger	90 FB
Abonnement :	Belgique	250 FB
(4 numéros)	Etranger	300 FB

Tarif de publicité

(4 numéros)

La page	: 5.000 F
La 1/2 page	: 3.000 F
Le 1/4 page	: 2.000 F

Les frais de clichés sont à charge de l'annonceur.

Publications d'articles

1) La Revue est ouverte aux articles traitant de statistique pure et appliquée, de recherche opérationnelle et de « quality control ».
2) Les manuscrits seront dactylographiés et peuvent être envoyés au secrétariat de la Revue : 66, rue de Neufchâtel, Bruxelles 6.
3) Les auteurs d'articles techniques recevront 25 tirés à part de leurs textes.
4) La responsabilité des articles n'incombe qu'à leurs auteurs.

Verkoopprijs

Per nummer :	België	75 BF
	Buitenland	90 BF
Abonnement :	België	250 BF
(4 nummers)	Buitenland	300 BF

Advertentietarief

(4 nummers)

Per bladzijde	: 5.000 F
Per 1/2 bladzijde	: 3.000 F
Per 1/4 bladzijde	: 2.000 F

De cliché-onkosten vallen ten laste van de adverteerders.

Publicaties van artikels

1) Het Tijdschrift neemt artikels aan over wiskundige statistiek en toepassingen, over operationeel onderzoek en kwaliteitszorg.
2) De teksten dienen getipt gestuurd te worden naar het secretariaat van het Tijdschrift : 66, Neufchâtelstraat, Brussel 6.
3) De auteurs ontvangen 25 overdrukken van de technische artikels.
4) De auteurs zijn alleen verantwoordelijk voor de inhoud van hun teksten.