

**REVUE BELGE DE STATISTIQUE, D'INFORMATIQUE
ET DE RECHERCHE OPERATIONNELLE**

Vol. 11 - N° 4

MARS 1972

**BELGISCH TIJDSCHRIFT VOOR STATISTIEK,
INFORMATIEK EN OPERATIONEEL ONDERZOEK**

Vol. 11 - N° 4

MAART 1972

La « Revue Belge de Statistique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle » est publiée avec l'appui du Ministère de l'Education nationale et de la Culture, par les Sociétés suivantes :

SOGESCI. — Société Belge pour l'Application des Méthodes scientifiques de Gestion.
Secrétariat : rue du Neufchâtel, 66
- 1060 Bruxelles. Tél. 37.19.76.

S.B.S. — Société Belge de Statistique.
Siège social : rue de Louvain, 44
- 1000 Bruxelles.
Secrétariat : rue de Louvain, 44
- 1000 Bruxelles.

Comité de Direction

P. GENNART, Ingénieur civil, Professeur-Directeur du Centre d'Informatique à l'E.R.M.

S. MORNARD, Licencié en Sciences.

R. SNEYERS, Docteur en Sciences, Chef de Section à l'Institut Royal Météorologique de Belgique.

Comité de Screening

P. GENNART.

F. LAMBERT, Professeur à la Faculté Polytechnique de Mons.

R. SNEYERS.

Rédaction

R. SNEYERS, Institut Royal Météorologique de Belgique, avenue Circulaire, 3 - 1180 Bruxelles.

Secrétariat

J.H. LENTZEN, rue de Neufchâtel, 66 - 1060 Bruxelles - Tél. 37.19.76.

Het « Belgisch Tijdschrift voor Statistiek, Informatiek en Operationeel Onderzoek » wordt uitgegeven met de steun van het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur, door de volgende Verenigingen :

SOGESCI. — Belgische Vereniging voor Toepassing van Wetenschappelijke Methodes in het Bedrijfsbeheer.
Secretariaat : Neufchâtelstraat, 66
- 1060 Brussel - Tel. 37.19.76.

S.B.S. — Belgische Vereniging voor Statistiek.
Maatschappelijke zetel : Leuvensestraat, 44 - 1000 Brussel.
Secretariaat : Leuvensestraat, 44 - 1000 Brussel.

Directie Comité

P. GENNART, Burgerlijk Ingenieur, Hoogleraar-Directeur van het Centrum voor Informatiek van de K.M.S.

S. MORNARD, Lic. in de Wetenschappen.

R. SNEYERS, Dr in de Wetenschappen, Afdelings-Chef bij het Koninklijk Meteorologisch Instituut van België.

Screening Comité

P. GENNART.

F. LAMBERT, Professor bij de Faculté Polytechnique de Mons.

R. SNEYERS.

Redactie

R. SNEYERS, Koninklijk Meteorologisch Instituut van België, Ringlaan, 3 - 1180 Brussel.

Secretariaat

J.H. LENTZEN, Neufchâtelstraat, 66
- 1060 Brussel. - Tel. 37.19.76.

REVUE BELGE DE STATISTIQUE ET DE RECHERCHE OPERATIONNELLE

VOL. 11 - N° 4 - MARS 1972

VOL. 11 - N° 4 - MAART 1972

SOMMAIRE — INHOUD

S.P. AGGARWAL. — Variation in parameters of a quadratic fractional functionals programming	3
H. BRENLY. — L'initiation à la statistique au niveau secondaire .	13
M. ROUBENS. — La formation statistique de l'ingénieur . .	19
Publications reçues — Ontvangen publicaties	24

BELGISCH TIJDSCHRIFT VOOR STATISTIEK
EN OPERATIONEEL ONDERZOEK

VARIATION IN PARAMETERS OF A QUADRATIC FRACTIONAL FUNCTIONALS PROGRAMMING

S.P. AGGARWAL *

The University of Calgary (Canada).

Introduction.

In practical situations, such as the chicken feed problem, the cost of any individual feed will vary from week to week, similar situations may arise for other elements of the problem. In this paper the resulting affects on an optimal solution of arbitrary variation of any coefficient of a quadratic fractional functional programming are analysed. If the optimal solution of the original problem is known [1], we study the possibility of any method which helps us to solve the new problem which is obtained by varying the parameters in the original problem. In actual existing problems the parameters a_{ij} , b_i , c_j and d_j are either estimates or they vary over the time. Work in this and related area has been done by Shetty [10], Courtillot [4], Garvin [5], Madansky [8], Wagner [12], Saaty [9], Aggarwal [2] and Swarup [11].

Mathematical Model:

$$\text{Maximize } Z = \frac{(\sum_{j=1}^n c_j x_j + \alpha)^2}{(\sum_{j=1}^n d_j x_j + \beta)^2} = \frac{(c' \chi + \alpha)^2}{(d' \chi + \beta)^2} \quad (0.1)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{or} \quad A \chi = b \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (0.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{or} \quad \chi \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (0.3)$$

* The research for this article has been financially supported by National Research Council of Canada under Grant No. 69-0027.

If we write

$$P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

then (0.2) may be written as

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0 \quad (0.4)$$

It is assumed that

- (i) The set S of feasible solutions is regular.
- (ii) $d' \chi + \beta$ is positive for all feasible solutions.
- (iii) Every basic feasible solution is non-degenerate.
- (iv) S contains at least two different points.
- (v) α and β are given constants.
- (vi) a_{ij} , b_i , c_j and d_j are parameters.

Also

- (a) A is $m \times n$ matrix, $n > m$.
- (b) χ , c , d are $n \times 1$ vectors.
- (c) b is $m \times 1$ vector.
- (d) prime denotes the transpose of a vector.

Let $\chi^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$ be the optimum solution of the original problem (0.1) through (0.3) when a_{ij} , b_i , c_j and d_j are constants and let the optimal basis corresponding to the above optimum solution be P_1 , P_2 , ..., P_m .

$\therefore$ We have

$$\sum_{i=1}^m P_i x_i^0 = P_0 \quad (0.5)$$

$$x_i^0 > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

As the vectors P_1 , P_2 , ..., P_m are linearly independent

$$\therefore P_j = \sum_{i=1}^m u_{ij} P_i \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (0.6)$$

We define the quantities [1]

$$z_j^{(1)} = \sum_{i=1}^m u_{ij} c_i \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$z_j^{(2)} = \sum_{i=1}^m u_{ij} d_i \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$T_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j^0 + \alpha$$

$$T_2 = \sum_{j=1}^n d_j x_j^0 + \beta$$

$$\xi_j = \frac{x_r^0}{u_{rj}}$$

and x^0 is an optimal solution [1] of the given problem (0.1) through (0.3) if

$$t_j = [T_2(c_j - z_j^{(1)}) - T_1(d_j - z_j^{(2)})]$$

$$\times [\xi_j \{T_2(c_j - z_j^{(1)}) + T_1(d_j - z_j^{(2)})\} + 2T_1T_2] \leq 0$$

or

$$[T_2(c_j - z_j^{(1)}) - T_1(d_j - z_j^{(2)})]$$

$$\times [\xi_j \{T_2(c_j - z_j^{(1)}) + T_1(d_j - z_j^{(2)})\} + 2T_1T_2] \leq 0$$

for all j

for all j

Change in the Requirement Vector P_0 .

We shall now consider the new problem.

$$\text{Maximize } Z = \frac{(\sum_{j=1}^n c_j x_j + \alpha)^2}{(\sum_{j=1}^n d_j x_j + \beta)^2} \quad (1.1)$$

subject to

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n = P_0 + \varepsilon \quad (1.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

Here the requirement vector P_0 is changed to $P_0 + \varepsilon$, where $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$. Let B be the square matrix whose column vectors are

$P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$, and P_m , further let B^{-1} be the inverse of the matrix B . Suppose β_i ($i = 1, 2, \dots, m$) be the i th row vector of B^{-1} i.e.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$\text{We have } \varepsilon = BB^{-1}\varepsilon = (P_1, P_2, \dots, P_m) \begin{bmatrix} \beta_1 \varepsilon \\ \beta_2 \varepsilon \\ \vdots \\ \beta_m \varepsilon \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon P_i \quad (1.4)$$

Making use of (0.5) in (1.4) we get

$$P_0 + \varepsilon = \sum_{i=1}^m P_i x_i^0 + \varepsilon = \sum_{i=1}^m P_i x_i^0 + \sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon P_i = \sum_{i=1}^m (x_i^0 + \beta_i \varepsilon) P_i$$

The change in P_0 affects the values of the basic variables in the optimal solution and we must consider the following two cases

- (1) $x_i^0 + \beta_i \varepsilon \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$)
- (2) at least one $x_i^0 + \beta_i \varepsilon$ is negative.

$\bar{Z}$ the value of the new objective function is given by

$$\bar{Z} = \frac{[\sum_{i=1}^m c_i (x_i^0 + \beta_i \varepsilon) + \alpha]^2}{[\sum_{i=1}^m d_i (x_i^0 + \beta_i \varepsilon) + \beta]^2} = \frac{[T_1 + \sum_{i=1}^m c_i \beta_i \varepsilon]^2}{[T_2 + \sum_{i=1}^m d_i \beta_i \varepsilon]^2} = \frac{\bar{T}_1^2}{\bar{T}_2^2}$$

where

$$\bar{T}_1 = T_1 + \sum_{i=1}^m c_i \beta_i \varepsilon$$

$$\bar{T}_2 = T_2 + \sum_{i=1}^m d_i \beta_i \varepsilon$$

It may be observed that $z_j^{(1)} = c_j$ and $z_j^{(2)} = d_j$ remain unaffected by the variation in P_0 .

Now I_j for the new problem is as

$$I_j = [\bar{T}_2 (c_j - z_j^{(1)}) - \bar{T}_1 (d_j - z_j^{(2)})] \\ \times [\xi_j \{\bar{T}_2 (c_j - z_j^{(1)}) + \bar{T}_1 (d_j - z_j^{(2)})\} + 2 \bar{T}_1 \bar{T}_2]$$

Case (1) $P_1, P_2, \dots, P_m$ is a feasible basis and it will be an optimal basis provided

$$\bar{z}_j \leq 0$$

If all $\bar{z}_j$ are not less than or equal to zero, we may start with this new feasible solution and with the help of the method [1] we can get an optimum solution.

Case (2) $(P_1, P_2, \dots, P_m)$ is not a feasible solution of the new problem. By making certain modifications it is possible to obtain the optimal solution of the new problem. Let $x_{i_k}^0 + \beta_{i_k} \varepsilon$ ($i_k = 1, 2, \dots, l$) be all negative ones among $x_i^0 + \beta_i \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

We now consider the following modified problem

$$\text{Maximize } \frac{[\sum_{j=1}^n c_j x_j - M \sum_{i_k=1}^l y_{i_k} + \alpha]^2}{[\sum_{j=1}^n d_j x_j + \beta]^2}$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n P_j x_j + \sum_{i_k=1}^l (-P_{i_k}) y_{i_k} &= P_0 + \varepsilon \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ y_{i_k} &\geq 0 \quad (i_k = 1, 2, \dots, l) \end{aligned}$$

y_{i_k} is the set of variables $i_k = 1, 2, \dots, l$.

M is very large positive quantity.

The optimum solution of the problem (1.1) through (1.3) coincides with the optimum solution of the modified problem. This is established below.

After introducing the new vector $-P_{i_k}$ ($i_k = 1, 2, \dots, l$) the following relation is satisfied

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m P_i (x_i^0 + \beta_i \varepsilon) + \sum_{i_k=1}^l (-P_{i_k}) (-x_{i_k}^0 - \beta_{i_k} \varepsilon) &= P_0 + \varepsilon \\ i &\neq i_k \quad (i = 1, 2, \dots, l) \\ x_i^0 + \beta_i \varepsilon &\geq 0 \quad i \neq i_k \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ -x_{i_k}^0 - \beta_{i_k} \varepsilon &\geq 0 \quad (i_k = 1, 2, \dots, l) \end{aligned}$$

This means that

$$x_i = \delta_i (x_i^0 + \beta_i \varepsilon)$$

$$x_j = 0 \quad (j = m + 1, \dots, n)$$

and

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & i \neq i_k \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ -1 & i = i_k \quad (i_k = 1, 2, \dots, l) \end{cases}$$

is a feasible solution of the modified problem. Now we can use the method [1] to find the optimal solution.

Change in the Coefficient Matrix A.

We consider the case where only one column vector P_s is changed to $\bar{P}_s$ and the matrix A is

$$\bar{A} = (P_1, P_2, \dots, P_{s-1}, \bar{P}_s, \dots, P_n)$$

and the new problem is

$$\text{Maximize } \frac{(\sum_{j=1}^n c_j x_j + \alpha)^2}{(\sum_{j=1}^n d_j x_j + \beta)^2} \quad (2.1)$$

subject to

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n P_j x_j + P_s x_s = P_0 \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

Again we assume x^0 to be an optimal solution of the problem (0.1) through (0.3), and corresponding optimal basis is B. Here also we shall discuss the problem in two parts.

$$(1) P_s \in B$$

$$(2) P_s \notin B.$$

Case (1). Since $P_1, P_2, \dots, P_m$ are linearly independent, we may write [2]

$$\bar{P}_s - P_s = \delta_{1s} P_1 + \delta_{2s} P_2 + \delta_{ss} P_s + \dots + \delta_{ms} P_m$$

or

$$\bar{P}_s = \delta_{1s} P_1 + \delta_{2s} P_2 + \dots + (1 + \delta_{ss}) P_s + \dots + \delta_{ms} P_m \quad (2.4)$$

($1 + \delta_{ss} \neq 0$)

Our aim is to find the conditions which δ_{is} must satisfy so that optimal basis for the new problem remains $P_1, P_2, \dots, \bar{P}_s, \dots, P_m$. As $P_1, P_2, \dots, \bar{P}_s, \dots, P_m$ are linearly independent, therefore using (0.5) in (2.4) we get [3]

$$P_0 = P_1 \left(x_1^0 - \frac{x_s^0 \delta_{1s}}{1 + \delta_{ss}} \right) + P_2 \left(x_2^0 - \frac{x_s^0 \delta_{2s}}{1 + \delta_{ss}} \right) + \dots \\ + \bar{P}_s \left(\frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \right) + \dots + P_m \left(x_m^0 - \frac{x_s^0 \delta_{ms}}{1 + \delta_{ss}} \right)$$

For the new basis to be feasible, we require

$$x_i - \frac{x_s^0 \delta_{is}}{1 + \delta_{ss}} \geq 0 \quad i \neq s \quad (2.5)$$

$$\frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \geq 0 \quad (2.6)$$

$$\text{As } x_s^0 > 0, \text{ therefore, } 1 + \delta_{ss} > 0 \quad (2.7)$$

Using (0.6) and (2.4) in this new problem we get

$$P_j = \bar{u}_{1j} P_1 + \bar{u}_{2j} P_2 + \dots + \bar{u}_{sj} P_s + \dots + \bar{u}_{mj} P_m$$

$$\text{where } \bar{u}_{ij} = u_{ij} - \frac{\delta_{is} u_{sj}}{1 + \delta_{ss}}$$

$$\bar{z}_j^{(1)} = z_j^{(1)} - \frac{u_{sj}}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m c_i \delta_{is}$$

$$\bar{z}_j^{(2)} = z_j^{(2)} - \frac{u_{sj}}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{is}$$

$$\bar{T}_1 = T_1 - \frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m c_i \delta_{is}$$

$$\bar{T}_2 = T_2 - \frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{is}$$

The new basis is optimal if

$$\bar{r}_j = [\bar{T}_2 (c_j - \bar{z}_j^{(1)}) - \bar{T}_1 (d_j - \bar{z}_j^{(2)})] \\ \times [\delta_j \{ \bar{T}_2 (c_j - \bar{z}_j^{(1)}) + \bar{T}_1 (d_j - \bar{z}_j^{(2)}) \} + 2 \bar{T}_1 \bar{T}_2] \leq 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(T_2 - \frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{is}) (c_j - z_j^{(1)} + \frac{u_{sj}}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m c_i \delta_{is}) \right. \\
&\quad \left. - (T_1 - \frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m c_i \delta_{is}) (d_j - z_j^{(2)} + \frac{u_{sj}}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{is}) \right] \\
&= [\xi_j \{ (T_2 - \frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{is}) (c_j - z_j^{(1)} + \frac{u_{sj}}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m c_i \delta_{is}) \\
&\quad + (T_1 - \frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m c_i \delta_{is}) (d_j - z_j^{(2)} + \frac{u_{sj}}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{is}) \\
&\quad + 2 (T_1 - \frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m c_i \delta_{is}) (T_2 - \frac{x_s^0}{1 + \delta_{ss}} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{is}) \} \leq 0
\end{aligned}$$

In case (2.8) does not hold for all $j = m+1, m+2, \dots, n$ but basis is feasible we can obtain the optimal solution by using the technique [1] given by author.

If the solution is not feasible we may consider the modified problem whose optimal is the same as that of (2.1) through (2.3).

The modified problem is

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize } \frac{(\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_s \bar{x}_s + \alpha - M x_s)^2}{(\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_s \bar{x}_s + \beta)^2} \\
&\text{subject to }
\end{aligned}$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_s x_s + \bar{P}_s \bar{x}_s + \dots + P_n x_n = P_0$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{x}_s \geq 0$$

M is sufficiently large positive number.

$$\text{Now } \bar{P}_s = BB' \bar{P}_s = \sum_{i=1}^m (\beta_i \bar{P}_s) P_i.$$

Obviously B is a feasible basis of the modified problem and the optimal solution can be obtained.

Case (2). Again B is a feasible basis for the new problem but t_s will be affected, say it become $\bar{t}_s$. If all $\bar{t}_s \leq 0$ then present basis is optimal. For $\bar{t}_s > 0$ we still solve the problem till the optimal solution is obtained.

Change in the Coefficient Vector c of the Objective Function.

When we change the coefficient vector c of the objective function, the new objective function becomes

$$\text{Maximize } \bar{Z} = \frac{[\sum_{j=1}^n (c_j + \Delta c_j) x_j + \alpha]^2}{(\sum_{j=1}^n d_j x_j + \beta)^2}$$

The original optimal solution remains unaffected but it is not essential that it is optimal for the new problem. Of course $z_j^{(2)} = d_j$ remains unchanged but $z_j^{(1)} = c_j$ changes and

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= T_1 + \sum_{j=1}^m \Delta c_j x_j^0; \quad \bar{z}_j^{(1)} = \sum_{i=1}^m u_{ij} (c_i + \Delta c_i) \\ \therefore \bar{t}_j &= [T_2 (c_j + \Delta c_j - \bar{z}_j^{(1)}) - \bar{T}_1 (d_j - z_j^{(2)})] \\ &= [T_2 (c_j + \Delta c_j - \sum_{i=1}^m u_{ij} (c_i + \Delta c_i)) - (T_1 + \sum_{j=1}^m \Delta c_j x_j^0) (d_j - z_j^{(2)})] \\ &\times [\xi_j \{T_2 (c_j + \Delta c_j - \bar{z}_j^{(1)}) + \bar{T}_1 (d_j - z_j^{(2)})\} + 2 \bar{T}_1 \bar{T}_2] \\ &= [T_2 (c_j + \Delta c_j - \sum_{i=1}^m u_{ij} (c_i + \Delta c_i)) - (T_1 + \sum_{j=1}^m \Delta c_j x_j^0) (d_j - z_j^{(2)})] \\ &\times [\xi_j \{T_2 (c_j + \Delta c_j - \sum_{i=1}^m u_{ij} (c_i + \Delta c_i)) + (T_1 + \sum_{j=1}^m \Delta c_j x_j^0) (d_j - z_j^{(2)})\} \\ &\quad + 2 (T_1 + \sum_{j=1}^m \Delta c_j x_j^0) T_2] \quad (2.9) \end{aligned}$$

If all $\bar{t}_j \leq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) then the original optimal solution is also optimal for the new problem. If there is some $\bar{t}_j$ is positive, we apply the technique [1] to this new problem to get optimal solution.

If the changes are made in the coefficients of the non-basic variables in the numerator of the objective function, then (2.9) reduces to

$$\begin{aligned}
\bar{t}_j &= [T_2 (c_j + \Delta c_j - z_j^{(1)}) - (d_j - z_j^{(2)}) T_1] \\
&\times [\xi_j \{T_2 (c_j + \Delta c_j - z_j^{(1)}) + (d_j - z_j^{(2)}) T_1\} + 2 T_1 T_2] \\
&= t_j + T_2^2 \Delta c_j [\xi_j \{\Delta c_j + 2 (c_j - z_j^{(1)})\} + 2 T_1]
\end{aligned}$$

This shows that if

$$\begin{aligned}
&\Delta c_j [\xi_j \{\Delta c_j + 2 (c_j - z_j^{(1)})\} + 2 T_1] \\
&j = m + 1, m + 2, \dots, n
\end{aligned}$$

are negative then original optimal remains optimal to the new problem as well. The change in vector d may be discussed in the same way as for change in vector c .

Acknowledgement.

I am grateful to Professor U.N. Singh for his inspiration for research and I am also thankful to my close friend Dr. Kanti Swarup, for useful suggestions.

REFERENCES

- [1] AGGARWAL, S.P. : « Quadratic Fractional Functionals Programming ». To appear. — in CERO.
- [2] AGGARWAL, S.P. : « Analyses of the Solution to a Linear Fractional Functionals Programming », *Metrika*, Vol. 16, 1970.
- [3] BARNET, S. : « Stability of the Solution to a Linear Programming Problem », *Oper. Res. Ort.*, Vol. 13, 1962.
- [4] COURTINILLOT, M. : « On Varying all the Parameters in a Linear Programming Problem and Sequential Solution of a Linear Programming Problem », *Oper. Res.*, Vol. 10, 1962.
- [5] GARVIN, W.W. : « Introduction to Linear Programming », McGraw Hill Book Co., New York, 1960.
- [6] GASS, S.I. : « Linear Programming », McGraw Hill Book Co., New York, 1969.
- [7] HADLEY, G. : « Linear Programming », Addison Wesley, Reading Mass, 1963.
- [8] MADANSKY, A. : « Methods of Solution of Linear Program under Uncertainty », *Oper. Res.*, Vol. 10, No. 4, 1962.
- [9] SAATY, T.L. : « Coefficient Perturbation of a Constrained Extremum », *Oper. Res.*, Vol. 7, 1959.
- [10] SHETTY, C.M. : « Solving Linear Programming Problems with Variable Parameters », *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 10, No. 6, 1959.
- [11] SWARUP, K. : « On Varying all the Parameters in a Linear Fractional Functionals Programming », *Metrika*, Vol. 16, 1970.
- [12] WAGNER, H.M. : « On the Distribution of Solutions in Linear Programming Problems », *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53, 1958.

L'INITIATION A LA STATISTIQUE AU NIVEAU SECONDAIRE *

H. BRENY

Université de l'Etat, Liège

1. En Belgique, la question d'existence d'un enseignement de probabilités et statistique au niveau secondaire ne se pose plus : en 1967, les Ministres Grootjans et Toussaint ont chargé une commission de représentants de l'enseignement supérieur d'établir la liste des matières du programme de mathématique; le point 9 de cette liste est « statistique descriptive, probabilités, éléments de statistique inférentielle ». La distribution de cet enseignement par années scolaires n'est pas officiellement connue à l'heure actuelle, on sait pourtant que le programme de 3^{me} scientifique comporte l'étude de la statistique descriptive et on peut présumer que « théorie des probabilités » sera placé en 2^{me}, et « éléments de statistique inférentielle » en 1^{re}. C'est d'ores et déjà la disposition adoptée (à un niveau de moindre difficulté mathématique) pour la section « Sciences humaines », récemment créée.

Le libellé de cette liste des matières tranche aussi une question qu'il reste pourtant intéressant de se poser in abstracto : lorsque l'on dit « théorie des probabilités », s'agit-il, dans ce contexte, de la théorie des phénomènes aléatoires ou de la théorie du comportement cohérent en régime d'incertitude (maximisation de la moyenne par rapport à des probabilités subjectives d'un indicateur cardinal d'utilité personnelle) ? Cette dernière théorie (dont l'intérêt est évident), quelle que soit la façon de l'exposer, repose en quelque endroit sur la théorie d'une certaine classe de phénomènes aléatoires, dont l'étude est présumée; en outre, son formalisme (ensembles convexes, avec un appel inévitable au théorème de von Neumann et Morgenstern), son interprétation (rapport entre comportement efficace et comportement cohérent), ses limites posent des problèmes difficilement accessibles à un adolescent de 17-18 ans. Aussi est-ce à bon droit que la liste des matières a été libellée de façon à ne laisser aucun doute sur ce point : il s'agit bien de la théorie des phénomènes aléatoires.

* Conférence faite à la « Journée Statistique » organisée par la Société Belge de Statistique, le 10 février 1971 au Palais des Congrès à Bruxelles.

2. Si la question d'existence ne se pose plus, on peut pourtant s'interroger sur la finalité d'un tel enseignement. On le peut d'autant plus que certains y ont vu l'occasion de développer l'exposé de recettes statistiques utilisables dans divers domaines, un peu à la façon de quelques cours de 1^{re} année d'université où l'on développe, vaille que vaille, les recettes dont le professeur pense avoir besoin par après. Ce serait là une erreur manifeste. Certes, l'utilité d'un enseignement, quel qu'il soit, n'est pas un facteur à négliger (et l'inutilité n'est pas un motif positif de choix) mais, dans l'enseignement secondaire général, ce n'est pas, et de loin, un facteur déterminant; le cours de mathématique, dans son ensemble, est utile à pas mal d'élèves, mais son but essentiel est la formation de l'esprit. Le chapitre « probabilités et statistique » fait partie de ce cours, et sa finalité essentielle est la même. Il ne s'agit pas d'y inculquer, par une sorte de dressage, des techniques (même utiles), il s'agit d'ouvrir l'esprit des élèves à une certaine façon de voir le monde, et de le préparer à recevoir ultérieurement, si le besoin s'en fait sentir, un enseignement davantage professionnel. Les trois parties de ce chapitre ont d'ailleurs chacune sa finalité propre.

3. La modeste statistique descriptive elle-même a une incontestable finalité culturelle. Nos élèves, en effet, doivent retirer de leur cours de mathématique, entre autres bénéfices, une véritable familiarité avec les données numériques (ce que les Anglais nomment « numeracy »); le cours de statistique descriptive sera pour eux l'occasion (unique, peut-être, au niveau secondaire), de rencontrer des tableaux de nombres ne présentant, a priori, aucune régularité mathématique. Il est pourtant vrai que la statistique descriptive telle qu'elle est ordinairement présentée, c'est-à-dire une suite de recettes de calcul, n'offre rien qui accroche l'intérêt des élèves. Il y a à cela deux remèdes possibles. L'un consiste à adopter systématiquement une présentation vectorielle : les tableaux de n nombres réels forment tout naturellement un espace vectoriel, que l'on dote d'une structure euclidienne par l'introduction du « produit scalaire statistique » $(\sum_1 x_i y_i)/n$; cette façon de faire est très élégante et offre un beau terrain d'exercices vectoriels, mais, à notre avis, limite trop la statistique descriptive à son aspect linéaire (auquel échappent, par exemple, la médiane et les quantités analogues; encore faut-il admettre que l'objection perd sa force en statistique multivariée). L'autre consiste à arriver le plus vite possible au diagramme cumulatif associé à tout tableau de nombres réels, et d'utiliser cette notion centrale pour motiver et définir toutes les autres : le chapitre de statistique descriptive reçoit ainsi une organisation très nette et très claire, et les recettes de calcul apparaissent toutes comme les traductions explicites de définitions intrinsèques préalables.

4. Le cours de calcul des probabilités a comme fin essentielle d'attirer l'attention des élèves sur le caractère aléatoire de maint phénomène du monde sensible. Dans l'état actuel de notre enseignement, c'est — au plus tôt — en 2^{me} année d'Université que l'étudiant rencontre le fortuit; c'est, pour beaucoup, trop tard : leurs études les ont déjà conditionnés au déterminisme, et le calcul des probabilités (y compris la statistique inférentielle) leur paraît irrémédiablement artificiel; de ce point de vue, l'introduction de la théorie des probabilités au programme de la classe de 17 ans sera chose excellente. L'on doit pourtant regretter que les contraintes de temps (et aussi l'âge des élèves) conduisent à renoncer presque entièrement aux manipulations (dés, cartes, urnes, voire comptages de particules ionisées); des expériences actuellement en cours permettent d'espérer que l'école primaire pourra prendre à son compte une initiation au fortuit par les manipulations concrètes (et les instituteurs seront mieux préparés à les diriger lorsque leur propre programme d'études comportera un cours de calcul des probabilités). Le formalisme habituel de la théorie des probabilités (événements, lois de probabilités, variables aléatoires, indépendance) est évidemment l'objet principal de l'enseignement (rappelons qu'il s'agit du cours de mathématique). Ce n'est pourtant pas le seul; il est assez étonnant de voir des professeurs de mathématique (ou des auteurs de manuels) défendre parfois la thèse que « les mots « hasard » ou « phénomène fortuit » n'ont pas de sens mathématique précis, qu'il faut donc les exclure de l'enseignement de la théorie des probabilités, qui est un formalisme mathématique parmi bien d'autres, et rien de plus ». La réponse est fournie par une excellente remarque des « Directions méthodologiques » du Ministère de l'Education Nationale (programme de 2^{me} « Sciences humaines ») : « la partie du programme consacrée aux probabilités doit apprendre à mathématiser une situation aléatoire ». La mathématique d'aujourd'hui, en effet, qui intéresse par elle-même une minorité (les mathématiciens), intéresse par ses possibilités d'application (par sa polyvalence, dit-on volontiers) un nombre considérable de personnes. [C'est bel et bien au professeur de mathématique qu'il incombe de montrer comment, sortant en quelque sorte de lui-même, le formalisme mathématique se met au service de la science du monde sensible; qui d'autre que lui, en effet, le pourrait ?] Or, la théorie des probabilités offre l'occasion de montrer aux élèves, sur des situations à la fois neuves (pour eux) et relativement simples, comment on construit un modèle mathématique d'une réalité donnée pour en imiter théoriquement le comportement et, par là même, le comprendre (en un sens assez particulier) et, s'il le faut, l'utiliser. C'est une occasion qu'il ne faut absolument pas manquer.

Une part non négligeable du cours de probabilités est consacrée aux variables aléatoires (nouvel avatar de l'omniprésente notion de fonction) et à leurs valeurs typiques. Il importe de souligner que si le cours de statistique descriptive a été organisé de façon convenable, les analogies formelles entre un diagramme cumulatif et une fonction de répartition permettent de gagner un temps précieux, sans rien sacrifier du juste esprit de rigueur mathématique. Dans le même ordre d'idées, il serait bon que, même si les seuls modèles effectivement étudiés sont des modèles finis, les définitions et les principaux énoncés soient suffisamment généraux pour pouvoir être repris tels quels dans une étude ultérieure (un bon exemple est fourni par la notion d'indépendance : des élèves habitués, au départ, à parler uniquement de l'indépendance d'événements ont quelque peine à assimiler la nécessaire généralisation à des familles d'événements).

5. En ce qui concerne le cours de statistique inférentielle, la liste des matières en limite très sagement le contenu à l'essentiel : les notions de population et d'échantillon, et un problème d'estimation (« estimation de la moyenne d'une population à partir d'un échantillon nombreux »).

On ne conçoit guère qu'un enseignement de statistique inférentielle puisse éviter de commenter d'abondance les notions de population et d'échantillon. Dans le contexte avant tout culturel du cours envisagé pour la classe terminale du secondaire, il faut même aller plus loin, et mettre très nettement en évidence la notion d'échantillonnage comme phénomène fortuit, ce qui fait d'emblée de ce cours une suite, et une très importante application, du cours de la classe de seconde. Les « théorèmes d'échantillonnage » sont le point de départ de toute procédure statistique, il convient donc d'en énoncer un certain nombre et de les faire bien comprendre. Il est vrai que rares sont les théorèmes de ce type que l'on pourrait démontrer (rares, mais non inexistants : le calcul de la moyenne et de la variance d'échantillonnage de la moyenne d'échantillon est parfaitement possible); au demeurant, même une démonstration en bonne et due forme ne suffirait sans doute pas à en éclairer le sens. Aussi devra-t-on avoir recours à des expériences à faire en classe, à partir d'une population artificielle (une « urne » contenant des jetons marqués de valeurs numériques bien choisies); il n'est pas difficile de faire calculer par les élèves l'ogive de la population (car, ici, on la connaît, puisqu'on la fabrique !), de leur faire extraire ensuite une centaine d'échantillons, calculer la moyenne de chacun d'eux, appliquer à ce tableau de nombres les méthodes de la statistique descriptive, et comparer les résultats obtenus aux caractéristiques de la population.

C'est ce même type d'expériences qui devra être utilisé pour illustrer le théorème de tendance normale, qui est facile à énoncer mais impossible à démontrer (à ce niveau). A partir de ce théorème, la propriété essentielle de l'intervalle de confiance pour la moyenne de population peut en effet se démontrer; mais, ici encore, une illustration expérimentale sera la bienvenue, pour éclairer définitivement cette notion difficile.

6. Ainsi équipé, l'élève sortant du secondaire aura des idées assez nettes sur le noyau central des méthodes statistiques. Qu'après cela l'enseignement supérieur lui impose un certain nombre de « recettes » pratiques, sans démonstration ni éclaircissement, sera peut-être un mal inévitable : il disposera du moins d'une base suffisamment solide pour établir des analogies qui lui permettront de comprendre, et de ne pas appliquer ces recettes de façon purement mécanique. Si, comme il faut l'espérer, il échappe à un pareil endoctrinement, il aura en tout cas enrichi son esprit d'une vue du monde de l'aléatoire, et de notions d'un grand intérêt, même pour quiconque n'aurait pas à les appliquer. Mais qui, de nos jours, échappe entièrement à la statistique ?

LA FORMATION STATISTIQUE DE L'INGENIEUR*

M. ROUBENS

Faculté polytechnique de Mons

Lorsqu'on songe à la fonction exercée par l'ingénieur, on se tourne traditionnellement vers l'image d'un « homme qui conduit et dirige à l'aide de mathématiques appliquées des travaux d'art ». Cette définition, contestable et sûrement incomplète, a cependant le mérite de nous rappeler que l'ingénieur de production assume une fonction essentiellement technique et que son premier outil de travail reste la mathématique appliquée.

Au milieu de la production composé d'*opérationnels* : ouvriers, contre-maîtres, techniciens, ingénieurs, on peut opposer le milieu de la direction dont la charge consiste à gérer l'entreprise et qui groupe les *fonctionnels* : juristes, économistes, ingénieurs commerciaux ou civils. Cette cassure dans l'ossature humaine de l'entreprise crée des tensions ou, pour le moins, des problèmes de communication. Il est donc utile d'introduire des agents de liaison, appelons-les ingénieurs de gestion, capables de saisir les problèmes technologiques et de cerner les difficultés que rencontre le gestionnaire.

Si la formation traditionnelle de l'ingénieur civil lui permet de maîtriser les difficultés techniques, rien dans cette formation académique ne le prépare à assumer une fonction de gestion. Cette constatation est d'autant plus regrettable que le passage du milieu de la production à celui de la direction constitue souvent une promotion.

La statistique a envahi depuis longtemps la table de l'agronome, du chimiste, de l'économiste, de l'ingénieur et elle vient récemment d'inquiéter le médecin, le juriste, le philologue. Nous utilisons à dessein le mot inquiéter car la formation reçue aux niveaux secondaire et supérieur par le juriste, le philologue et même le médecin, les prépare très mal à assimiler les techniques statistiques. L'exposé de M. le Professeur Breny nous promet, à cet égard, des lendemains qui chantent.

* Conférence faite à la « Journée statistique » organisée par la Société Belge de Statistique, le 10 février 1971 au Palais des Congrès à Bruxelles.

Le médecin, l'économiste ne peuvent négliger les connaissances subjectives qu'ils possèdent sur les individus examinés. On comprend dès lors, l'intérêt qu'ils portent aux théories de la décision, à la statistique bayésienne. L'agronome et le chimiste sont principalement préoccupés par l'élaboration de plans expérimentaux.

L'ingénieur porte également à la statistique un intérêt diversifié.

L'ingénieur des mines est particulièrement intéressé par les méthodes d'échantillonnage des produits en vrac ou en milieu continu. En effet, il est amené à sonder la qualité d'un minerai se trouvant en vrac dans un camion, une trémie, sur une courroie transporteuse. Dans certains cas, le minerai se trouve encore en couche.

L'ingénieur chimiste élabore des plans expérimentaux et utilise les techniques d'optimisation en vue de déterminer un standard de production en laboratoire, standard qui est d'ailleurs réajusté au niveau de la production industrielle.

L'ingénieur électricien s'intéresse à l'étude des processus aléatoires qui lui sont utiles dans l'étude des bruits de fond. Il a recours à la programmation mathématique et à la théorie des graphes lors de l'étude de lignes ou de circuits.

L'ingénieur mécanicien utilise les techniques du contrôle statistique des fabrications lorsqu'il souhaite contrôler une production de séries.

L'ingénieur des constructions civiles se tourne vers les méthodes du chemin critique (PERT) lorsqu'il souhaite réaliser un ordonnancement harmonieux de grands travaux comportant plusieurs milliers de tâches.

Cette énumération, sans être exhaustive, montre clairement qu'il est difficile, même au niveau d'une Ecole d'ingénieurs, de concevoir un enseignement général de statistique qui satisfasse toutes les disciplines.

L'INGENIEUR FACE AUX PROBLEMES TECHNOLOGIQUES

Un chercheur opérationnel, le Professeur Little du M.I.T. écrivait récemment, dans la revue « Management Science » : « the big problem with management science models is that managers practically never use them ». On peut donc se demander si l'ingénieur, placé devant la difficulté de résoudre un problème concret, peut tirer profit des modèles offerts par la recherche opérationnelle. En guise de réponse, essayons de vider la querelle qui oppose le mathématicien d'application et l'ingénieur.

Le mathématicien manipule des modèles, améliore ceux dont il dispose déjà, non pas avec le souci de se rapprocher d'une réalité mais en fonction des outils mathématiques qui lui permettent d'avancer dans l'abstraction. Il projette ensuite le modèle sur la réalité, prenant parfois le risque de la déformer dangereusement ou de s'en éloigner délibérément.

L'ingénieur, incontestablement lié à la réalité, peut choisir deux voies. La démarche la plus habituelle consiste à se fier au bon sens, à se laisser guider par l'expérience après avoir rejeté définitivement les modèles élaborés par les spécialistes en les accusant de manquer de réalisme et de s'étouffer dans des hypothèses trop restrictives.

La seconde démarche, plus délicate mais aussi plus enrichissante, consiste à tirer profit des formalismes, à exploiter les modèles existants en vue d'élaborer des heuristiques permettant d'obtenir une solution qui, après avoir été soumise à l'épreuve de la réalité quotidienne, dévoile de nouveaux aspects que le bon sens lui-même ne peut soupçonner.

La recherche du modèle adéquat ne constitue pas l'essentiel des préoccupations et des difficultés que rencontre l'ingénieur de gestion. Considérons, à titre d'exemple, l'ingénieur confronté à un problème de stock. Il doit établir une bonne prévision économique permettant une analyse fouillée des coûts, réorganiser les magasins et les ateliers, sélectionner les fournisseurs en vue d'augmenter la régularité des livraisons, éduquer aux techniques nouvelles les hommes chargés de la gestion journalière et enfin, choisir dans la forêt des modèles existants, celui qui convient le mieux à la situation qu'il est chargé de maîtriser. La concentration de ses efforts sur l'un de ces aspects, au détriment des autres, conduit inévitablement à des graves écueils, sinon à l'échec.

L'équilibre souhaité ne peut être atteint que si l'ingénieur chargé de traiter un tel problème a maîtrisé les multiples aspects que présente la gestion scientifique qui fait appel à l'économie d'entreprise, au traitement de l'information, à la recherche opérationnelle, ...

L'INGENIEUR FACE AUX PROBLEMES DE MANAGEMENT

Nous avons déjà décrit la position délicate qu'occupe l'ingénieur de gestion, maillon entre la chaîne des opérationnels et des fonctionnels. Cette situation le conduit à jouer le rôle de médecin de l'entreprise. Il ausculte souvent, décèle les vices cachés, place des greffes et la réaction ne tarde pas à se manifester : le phénomène de rejet se déclenche.

De nombreuses définitions du chercheur opérationnel ont été données par les humoristes :

- « c'est une manière coûteuse de se faire insulter par des gens inexpérimentés qui ont la moitié de votre âge » (Boiteux).
- « c'est un homme qui vous prend votre montre pour vous dire l'heure qu'il est et qui s'en va ensuite sans vous la rendre » (Townsend).

Pour R. Beauvais, auteur de « l'Hexagonal tel qu'on le parle », « tâchez de savoir ce qu'il faut faire pour que ça aille mieux » se traduit par « effectuez une recherche opérationnelle ».

Toutes traduisent le malaise que l'ingénieur est amené à surmonter.

Dans les entreprises saines, les méthodes de gestion présentent un caractère prophylactique. L'ingénieur de gestion cherche à prévoir les défaillances et essaye d'améliorer les performances. Les greffons tiennent. Dans les entreprises moins saines, les méthodes de gestion présentent parfois un caractère thérapeutique et les phénomènes de rejet s'accroissent.

Alors que le jeune ingénieur de production est porté par ses aînés lorsqu'il exécute ses premiers travaux, le jeune ingénieur de gestion est plongé instantanément dans un climat relativement hostile et sa formation universitaire doit le préparer à vaincre cette difficulté.

FORMATION STATISTIQUE DE L'INGENIEUR

Un examen rapide des programmes d'ingénieur permet de constater que la mathématique occupe une place prépondérante dans les deux années de candidature. Un second examen permet de vérifier que la mathématique détermine : algèbre, analyse, géométrie, y règne en maître alors que la mathématique de l'aléatoire, outil de base du gestionnaire, y est très modestement représentée. Nous devons d'ailleurs cette représentation aux astronomes et topographes, confrontés depuis toujours aux problèmes d'erreurs de mesure.

Si nous admettons que les outils de base de l'ingénieur évoluent et se diversifient en fonction des spécialités, nous sommes forcés de constater qu'une éventuelle mise à jour se heurte inévitablement à la barrière du nombre total d'heures réservées aux enseignements de candidature. Nous sommes alors en droit de nous demander s'il est logique de conserver un ensemble homogène pour toutes les candidatures et s'il n'est pas raisonnable de songer plutôt à un système de crédit d'heures dès la seconde année. En effet nous avons mis en évidence la difficulté de concevoir un enseignement de

statistique commun à toutes les spécialités. Le même problème se pose pour les enseignements plus fondamentaux d'analyse et de géométrie.

Nous avons également insisté sur l'utilité de former des ingénieurs d'un type nouveau : les ingénieurs de gestion. Le problème a été résolu dans la plupart de nos universités par des moyens divers : cours postuniversitaires, diplômes complémentaires, ...

La Faculté polytechnique de Mons a créé en 1968, le grade d'ingénieur en techniques opérationnelles. La nouvelle spécialité comporte, au-delà des deux années de candidature, une formation technique correspondant à celle de l'ingénieur traditionnel ainsi qu'une spécialisation en économie d'entreprise, recherche opérationnelle, traitement de l'information, sciences humaines.

Cette spécialisation fait appel à des besoins qui lui sont propres : la mathématique de la gestion comprenant des cours d'algèbre et d'analyse développés, des enseignements d'analyse numérique et de méthodes de programmation, des enseignements de mathématiques aléatoires : calcul des probabilités, statistique, ...

Le contact avec la vie d'une entreprise ne peut-être négligé. Il faut donc songer à créer des *laboratoires de gestion*. Une des façons de réaliser ces laboratoires consiste à intégrer l'étudiant dans une entreprise afin de lui permettre de mettre en œuvre ses connaissances. La résolution d'un problème réel au sein d'une entreprise permet à l'étudiant de se « frotter » à la réalité.

Alors qu'il est soutenu et conseillé par ses professeurs et le responsable du travail, l'étudiant peut constater qu'il est possible de surmonter les difficultés que présentent toujours un vrai problème. Il entre ainsi, mieux armé et plus confiant, dans la vie professionnelle.

Pour conclure, nous pouvons espérer beaucoup des techniques de gestion dans l'avenir. Il faut certes développer la recherche de modèles nouveaux et les mathématiciens d'application s'y emploient. Il faut également assurer le développement de cette recherche et nous espérons que les Ecoles d'ingénieurs s'y emploieront. Nous parviendrons à ce développement en créant des liens plus étroits entre l'économie, la recherche opérationnelle et l'informatique ainsi qu'en intensifiant les relations entre l'industrie et l'université.

PUBLICATIONS REÇUES

ONTVANGEN PUBLICATIES

- 1) Q.F. (Qualité et Fiabilité) Bulletin de l'AFCIQ, Paris, Vol. VII, N° 4, décembre 1971.
- 2) Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, N° B 2 et B 3 (1971), V 2 et V 3 (1971), R 2 (1971).
- 3) Cuadernos de Estadística Aplicada e Investigación Operativa (Barcelone), Vol. VII, Fasc. 2, 1970-1971.
- 4) Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 14, N°s 2-3 et 4 (1971).
- 5) Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa (Madrid), Vol. XXII, Cuadernos 3 (1971).
- 6) Giornale degli Economisti e Annali di Economia, Università Commerciale Luigi Bocconi (Milano), N°s 7-8 et 9-10 (1971).
- 7) Annales des Sciences Economiques Appliquées (U.C.L.), N° 4, novembre 1971.
- 8) Notas de Álgebra y Análisis, N° 3, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (Argentine).
- 9) Paninformatic, Bruxelles, N° 10, novembre-décembre 1971.
- 10) Industrielle Organisation - Institut d'Organisation Industrielle de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich, N°s 11 et 12 (1971) et 1 (1972).
- 11) Etude sur la situation économique de l'Europe en 1970.
Deuxième partie : l'Economie Européenne en 1970, Nations Unies, Genève.
- 12) Systèmes d'informatique Magazine, Honeywell-Bull, Automne 1971.
- 13) BIN Revue IBN, Institut Belge de Normalisation - Belgisch Instituut voor Normalisatie, N°s 10 à 12 (1971) et 1 (1972).
- 14) Oost-Vlaanderen Groeit, N°s 3 et 4 (1970).
- 15) Etudes et Documents du CNBOS, N°s 369 à 380 inclus.
- 16) Organisation Scientifique (CNBOS), N°s 10 à 12 (1971).
- 17) Operational Research Quarterly, Vol. 22, N° 4, December 1971.
- 18) Revue de Statistique Appliquée, Vol. 19, N° 4, 1971.

Prix de vente

Au numéro : Belgique 75 FB
Etranger 90 FB
Abonnement : Belgique 250 FB
(4 numéros) Etranger 300 FB

Tarif de publicité
(4 numéros)

La page : 5.000 F
La 1/2 page : 3.000 F
Le 1/4 page : 2.000 F

Les frais de clichés sont à charge de l'annonceur.

Publications d'articles

- 1) La Revue est ouverte aux articles traitant de statistique pure et appliquée, de recherche opérationnelle et de « quality control ».
- 2) Les manuscrits seront dactylographiés et peuvent être envoyés au secrétariat de la Revue : 66, rue de Neufchâtel, Bruxelles 6.
- 3) Les auteurs d'articles techniques recevront 25 tirés à part de leurs textes.
- 4) La responsabilité des articles n'incombe qu'à leurs auteurs.

Verkoopprijs

Per nummer : België 75 BF
Buitenland 90 BF
Abonnement : België 250 BF
(4 nummers) Buitenland 300 BF

Advertentietarief
(4 nummers)

Per bladzijde : 5.000 F
Per 1/2 bladzijde : 3.000 F
Per 1/4 bladzijde : 2.000 F

De cliché-onkosten vallen ten laste van de adverteerders.

Publicaties van artikels

- 1) Het Tijdschrift neemt artikels aan over wiskundige statistiek en toepassingen, over operationeel onderzoek en kwaliteitszorg.
- 2) De teksten dienen getipt gestuurd te worden naar het secretariaat van het Tijdschrift : 66, Neufchâtelstraat, Brussel 6.
- 3) De auteurs ontvangen 25 overdrukken van de technische artikels.
- 4) De auteurs zijn alleen verantwoordelijk voor de inhoud van hun teksten.